Das

Mathematische Aschenbrödel

in

Schule, Werkstatt, Wald und Feld

oder der

INGENIEUR-MESSKNECHT

mit und ohne Verbindung seiner polytechnischen Brieftasche
als populäres Universal- u. Taschen-Instrumentchen
mathematischer Gymnastik u. Praxis
in
vierter Auflage
für
mittlere u. höhere Lehranstalten u. messende u. rechnende Stände aller Art
insb. für **Gymnasien** u. **Realschulen** wie für
Militär u. Marine, Forst- u. Landwirthschaft, Handel u. Fabrikwesen,
Bau- u. andre Technik.

Zugleich ein Commentar u. Leitfaden zur praktischen wie pädagogischen
Ausnutzung der elementarern Theile obgenannter Brieftasche

von

Max. Rob. Pressler

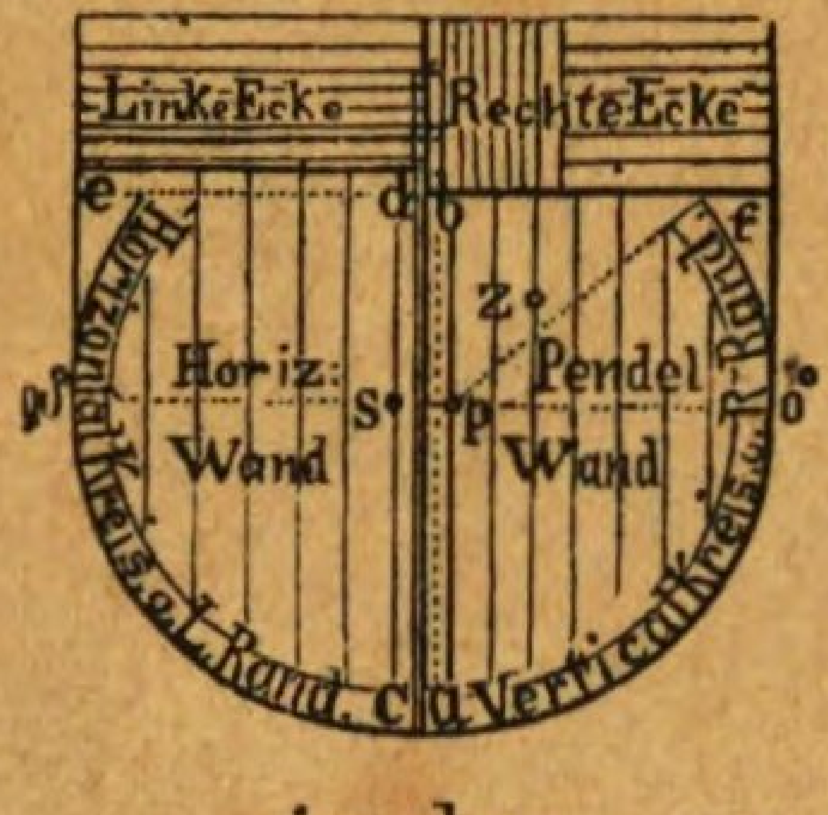
Prof. a. d. Akademie Tharand, K. Sächs. Hofrath, Ritter I. Cl. d. Grshrzgl. Old. u. d. Sächs. Ernst. H. u. V.-O
Ehrenmitglied des Oestr. Reichs-, des Schweiz. u. a. Forst- u. Gewerbsvereine.

Leipzig.
Baumgärtner's Buchhandlung.
1870.

Jedem Exemplare ist ein buchbinderisch solid gearbeiteter Messknecht vom feinern [illegible] (. 2) nebst einem Augenglas beigegeben, worauf man bei Empfang achten wolle ☞ **da defekte Exemplare nicht zurückgenommen werden können.** ☜

Bei

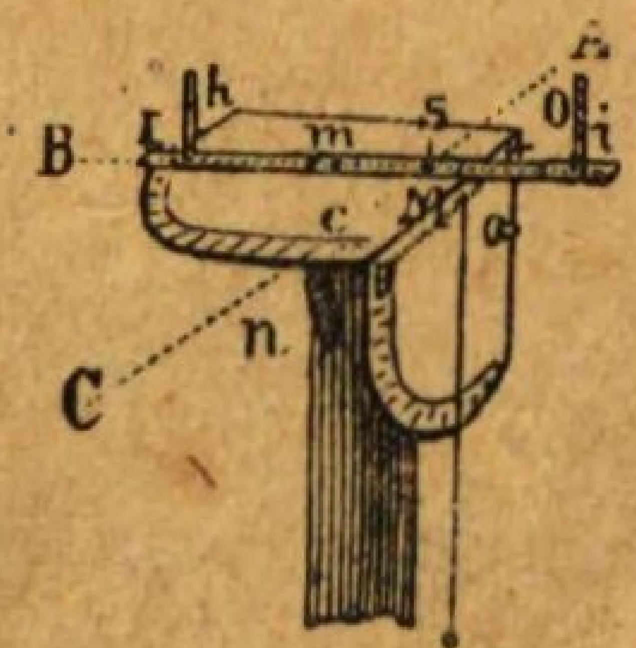
Verwandlung der Messknechtstafel



in das

Visir- oder Messinstrument



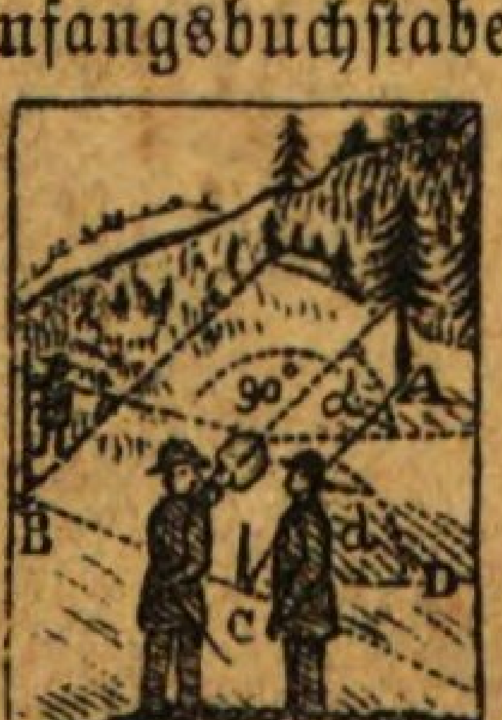




☞ HAB ACHT ☜


die **rechte** Oberecke stets **unter** die linke zu legen, nie umgekehrt! Bemerke deshalb in der Regel „**r**echts **u**nten" oder „**l**inks" **o**ben die alphabetische Nachbarschaft ihrer Anfangsbuchstaben.


...äschchen für eine Lupe oder für ...isirstifte.




Täschchen für eine Lupe oder für Visirstifte.

...n Schriftchen: „Das mathemat. Aschenbrödel in Schule, Werkstatt, Wald u. Feld etc." §§ 1—8 u. deren Beiblatt: „Notiz über Nachbezug." (Leipzig, Baumgärtner's Buchhandl.)


Qw
Z
Cw
Sec
Cos
Tg
Soviel Ganze-Stellen die Zahl, so viele Anfangsnullen die Reciproke, u. umgekehrt.
Duod C. in C'od
n: 1728
Nimm n/12
u. verfahre ganz wie drüben.


Kap. N. = 1,0 P^n
V. = 1:N
Rent. E. = (N-1):P
A. = E:N
Log. 1,02 = 0,0086002
Log. 1,025 = 0,0107239
Log. 1,03 = 0,0128372
Log. 1,035 = 0,0149403
Log. 1,04 = 0,0170333
Log. 1,045 = 0,0191163
Log. 1,05 = 0,0211893
Log. 1,055 = 0,0232525
Log. 1,06 = 0,0253059
log. 2 = 0,3010300
log. 3 = 0,4771213
1 Hectar
Cubm pro Hectar



Jahre	3%	3½	4%
	Kap.	Nachw	rth
5	1,159	1,188	1,217
10	1,344	1,411	1,480
15	1,558	1,675	1,801
20	1,806	1,990	2,191
25	2,094	2,363	2,666
30	2,427	2,807	3,243
35	2,814	3,334	3,946
40	3,262	3,959	4,801
45	3,782	4,702	5,841
50	4,384	5,585	7,107
55	5,082	6,633	8,646
60	5,892	7,878	10,52
65	6,830	9,357	12,80
70	7,918	11,11	15,57
75	9,179	13,20	18,95
80	10,64	15,68	23,05
90	14,30	22,11	34,12
100	19,22	31,19	50,50
110	25,83	44,00	74,76
120	34,71	62,06	110,7
150	84,25	174,2	358,9
200	369,4	972,9	2551

Jahre	Rent	End	wrth
5	5,309	5,362	5,416
10	11,46	11,73	12,01
15	18,06	19,30	20,02
20	26,87	28,28	29,78
25	36,46	38,95	41,65
30	47,58	51,62	56,08
35	60,46	66,67	73,65
40	75,40	84,55	95,03
45	92,72	105,8	121,0
50	112,8	131,0	152,7
55	136,1	160,9	[illegible]
60	163,1	196,5	[illegible]
65	194,3	238,8	[illegible]
70	230,6	288,9	[illegible]
75	272,6	348,5	448,6
80	321,4	[illegible]	551,2
90	443,3	[illegible]	828,0
100	607,3	[illegible]	1238
110	827,6	1229	1844
120	1124	1745	2822
150	[illegible]	4949	8948
200	2279	21769	63744
	3%	3½	4%



PRESSLER'S
INGENIEUR-MESSKNECHT Dresden.
Tharand.
Sin
Segment
Bogen
Segmnt
Dec D
KREIS
Duod D U
Duod. □' in □' od.
П: 144
Suchen П in der KREIS-SKALA u. mit dem zugehörig Dec. D mit-
tels der Duod. D-Spalte den anderweiten KREIS.

Das

Mathematische Aschenbrödel

in

Schule, Werkstatt, Wald und Feld

oder der

INGENIEUR-MESSKNECHT

mit und ohne Verbindung seiner polytechnischen Brieftasche

als populäres Universal- u. Taschen-Instrumentchen

mathematischer Gymnastik u. Praxis

in

vierter Auflage

für

mittlere u. höhere Lehranstalten u. messende u. rechnende Stände aller Art

insb. für **Gymnasien** u. **Realschulen** wie für

Militär u. Marine, Forst- u. Landwirthschaft, Handel u. Fabrikwesen,

Bau- u. andre Technik.

Zugleich ein Commentar u. Leitfaden zur praktischen wie pädagogischen

Ausnutzung der elementarern Theile obgenannter Brieftasche

von

Max. Rob. Pressler

Prof. a. d. Akademie Tharand, Kgl. Sächs. Hofrath, Ritter I. Cl. d. Grshrzgl. Old. u. d. Sachs. Ernst. H. u. V.-O.

Ehrenmitglied des Oestr. Reichs-, des Schweiz. u. a. Forst- u. Gewerbsvereine.

Leipzig.

Baumgärtner's Buchhandlung.

1870.

Jedem Exemplare ist ein buchbinderisch solid gearbeiteter Messknecht vom feinern Stich (§ 2) nebst einem Augenglas beigegeben, worauf man bei Empfang achten wolle ☞ da defekte Exemplare nicht zurückgenommen werden können ☜

Die Formel nicht,

der Geist ist's Wesen der Mathesis für die Schule wie das Leben!

denn er ist der Geist der musterhaftesten weil vollendetsten Wissenschaftlichkeit nach Inhalt wie nach Form: der Geist der klarsten Besonnenheit, der tiefsten Gründlichkeit, der höchsten Ordnung, der strengsten Konsequenz, u. somit ein Geist, ohne welchen jede theoretische wie praktische, humanistische wie gewerbliche Thätigkeit mehr u. minder stets Gefahr läuft, der Halbheit und dem Irrthum zu verfallen.

Druck der Königl. Hofbuchdruckerei von C. C. Meinhold & Söhne in Dresden.

Inhalt.

Als **Prospektus**: „Ueber die humanistische u. wirthschaftliche Bedeutung, Stellung u. Cultur der praktischen Mathematik in Schule u. Leben. Ein Bruchstück aus der Einleitung zur (math. u.) polytechnischen Brieftasche" . . . S. **I—XII**
Notiz über Nachbezug von Meßknechten u. Armaturen dazu . . . . S. XIII

Erster Abschnitt.

Allgemeines u. Vorläufiges . . . . S. 1—12
I. Vorwort u. Einleitung zur vierten Auflage des Ingenieur-Meßknechts, zugleich als Schulcircular . . . . S. **3—6**
II. Zur Uebersicht des Instruments u. seiner Behandlung, Armirung u. Justirung S. **7—12**

Zweiter Abschnitt.

Aus der **Arithmetik** (mit Vorbemerkung) . . . . S. 13—50
Kap. 1. Meßknechts-Hülfen zur allgemeinen Zifferrechnung S. **15—22**
A. Die Reciprokentafel zur Ersparung der Divisionsarbeit S. 15. —
B. Quadratwurzel u. Quadrat S. 16. — **C.** Cubicwurzel u. Cubus S. 18. —
D. Logarithmentafel S. 20.
Kap. 2. Maskunde u. Masrechnung*) . . . . S. **22—28**
A. Beisp. über einfache Masrechnungen S. 23. — **B.** dgl. über combinirte S. 24. —
C. dgl. über Specifisch- u. Absolut-Gewicht S. 25; insbesondre der technisch-geformten Stoffe S. 27.
Kap. 3. Zuwachs-, Zins- u. Rentenrechnung . . . . S. **28—40**
A. Zuwachsrechnung überhaupt S. 28. — **B.** Strenge Zinsrechnung S. 31. —
C. Rentenrechnung S. 33. — **D.** Verdichtete Zins- u. Rentenrechnung zum flüchtigen Rechnen im Stehen u. Gehen S. 37. —
E. Gedrängte Nachwerths- u. Zinstafel (Taf. 32 aus V.'s forstl. Hülfsbuch) S. 40.
Kap. 4. Insgemein (mit Vorbemerkung für Pädagogen) . . S. **41—50**
A. Zur Reihenlehre S. 41.
B. Anwendung der Reihen auf die Pyramiden- u. Kegellehre S. 47—50.

Dritter Abschnitt.

Aus der **Geometrie** (mit Vorbemerkung) . . . . S. 51—92
Kap. 5. Meßknechts combin. Chordentafel (*Ch.*- u. *Bh*-Skala) S. **53—55**
Kap. 6. Meßknechts übrige goniometr. od. trigonometr. Tafeln „ **56—62**
Ueberhaupt S. 56. — Grundformeln S. 59. — Sinus S. 60. — Cosinus S. 61. — Tangente 2c. S. 61. — Sekante 2c. S. 62.
Kap. 7. Meßknechts combin. Kreis- u. Kreissegmenttafel S. **63—68**
Im Allgemeinen S. 63. — Vollkreistafel für's seitherige Duodecimalmas S. 64. — Dgl. für's seitherige wie für's neue (metrische) Decimalsystem S. 65. — Elliptische Flächen S. 66. — Kreissegmenttafel für Chorde, Bogenhöhe, Bogenlänge u. Segmentsfläche S. 66.
Kap. 8. Zur Pyramiden- u. Kegellehre . . . . S. **69—79**
Die drei vollen (graden u. aus- u. eingebauchten) Pyramiden u. Kegel S. 69. — Deren Stutze S. 71. — Der Faßraum S. 74. — Die beliebig od. unbestimmt aus- u. eingebauchten Konoide u. dgl. S. 74. — Zur genauen Stammkubirung S. 75.
Anhang zu Kap. 8: Zur Begründung der vorhergegangenen Regeln S. 77.

---

*) Zunächst mit Bezug auf Kap. III der Brieftasche, das für gegenwärtige Schrift durch den „Metrologischen Anhang" ersetzt ist, dessen Tabellen-Nummern jedoch mit den angezogenen der Brieftasche nicht zu verwechseln sind.

Kap. 9. Zur Sphären- u. Sphäroidenlehre . . . . . S. **80—92**
Im Allgemeinen S. 80. — Die Kugel u. ihre Theile in Absicht auf Oberflächen S. 81. — Desgl. in Absicht auf Volumen S. 82. — Ellipsoid u. ellipt. Kegel S. 83. — Das sphärische Dreieck zur Zeitberechnung aus gemessener Sonnenhöhe S. 84. — Die Formeln zu solcher Zeitmessung S. 86.
Erster Anhang zu Kap. 9: Zur Begründung der Kugel- u. Ellipsenberechnungen S. 87.
Zweiter Anhang zu Kap. 9: Zur Begründung der Zeitberechnungsformeln od. der Verwendung des Meßknechts als Sonnenuhr S. 90.

Vierter Abschnitt.

Aus der **Geodäsie** mit Dendrometrie u. Chronometrie oder Feld- u. Wald- u. Baum- u. Zeitmeßkunst . . . . S. 93—128
Kap. 10. Der Ingenieur-Meßknecht ohne jegliche Armatur, oder schlicht und in freier Hand . . . . S. **95—106**
A. Ueberhaupt S. 95. — Visirpraxis S. 95. — Prüfung 2c. der Visirkanten S. 96; des Horizontalkreises S. 96; des Vertikalkreises S. 97.
B. Als Transversalmasstab, Metermas u. Transporteur S. 98.
C. Als Winkelkreuz in freier Hand S. 100.
D. Als Horizontal- u. Bergwage S. 101. — Horizontal-, wie Steigungs- u. Neigungspunkte u. Curven S. 101. — Falllinien der Berghänge S. 102. — Horizontalreduction geneigter Längen u. Flächen S. 102.
E. Als Hipsometer (Baum- u. Berghöhenmesser). Allg. Regeln S. 103. Gewöhnliches (Baum-) Höhenmessen S. 104. — Berghöhenmessung S. 105.
F. Als Sonnenhöhen- u. Zeitmesser: s. folg. Kapitel S. 113.
Kap. 11. Der Ingenieur-Meßknecht mit seiner kleinen Armatur S. **107—115**
Allgemeines und das kleine Zeughäuschen S. 107. — Einfachster Stativknecht S. 108. — Die Visirstifte S. 109. — Die Höhen- u. Nivellirdiopterchen S. 109. — Collimationsfehler bei ihrer Einsteckung S. 110. — Zur Nivellirpraxis damit S. 111. — Messung der Sonnenhöhe u. Zeit S. 113.
Kap. 12. Der Ingenieur-Meßknecht mit seiner großen Armatur S. **116—128**
Das eigentl. (neuere) Meßknechtsstativ S. 116; Manipulationen damit S. 117. — Das (neuere) Meßknechtsvisirlineal S. 118; Manipulationen damit beim Horizontalstellen u. Nivelliren S. 119; dgl. beim Messen u. Auftragen von Horizontal- (resp. auch andern) Winkeln S. 120. — Meßknechts Bussolenlineal S. 122.
Erster Anhang zu Kap. 12: Zur Prüfung des Visirlineals eventuell auch seiner Bussole S. 123.
Zweiter Anhang zu Kap. 12: Weitere Beisp. zum trigonometr. Praktikum S. 127.

Metrologischer Anhang

als Ersatz für das auf den Seiten 22—28 citirte Kap. III der Brieftasche.
(Bruchstück aus den forst- u bauwirthschaftl. Supplementstafeln zu B.'s Forstl. Hülfsb. 2c. 3. Aufl. 1869.)

Vorbemerkung für's norddeutsche Bundesgebiet. — **1**: Neufranzösisches od. metrisches System; **2**: Andre allgemeine Mase; **3**: Spezielle Mase; **4**: Geld- u. Münzwesen; **5**: Neudeutsches System nach dem 1865er Entwurfe; Vergleichungs- u. Verwandlungstafeln: **6, 7, 8** u. **9**: für's Längen-, Quadrat- u. Cubicmas; **10** u. **11**: für's Feld- u. Waldflächenmas u. Quadratmeilen; **12** u. **13** für's Waldflächen- u. Cubicmas d. i. für Forstmassenerträge u. dgl.; **14** u. **15** für's Landflächen-Gewicht u. Landflächen-Hohlmas (für Felderträge u. dgl.) **16, 17, 18** u. **19**: für Holmase u. deren kubische Größe; **20** u. **21**: für Gewichte **22** u. **23**: für Hohlmas- u. Cubicfuß-Gewicht; **24**: für Fußpfunde u. Meterkilogramme (Mechanische Arbeit); **25^a^** bis **25^d^**: Spezifisch-Gewicht a) der Derbmassen, b) der geschichteten Massen, c) der Flüssigkeiten, d) der Gase **26**: Cubicfuß- 2c. Wassergewicht; **27**: Absolut-Gewicht der sub 25 aufgeführten Stoffe; **28**: Mittelgewicht der deutschen Forst- u. Feldhölzer; **29**: desgl. der bautechnischen Materialien; **30**: desgl. von Metallplatten u. Langeisen. — Nachbemerkung zur Einführung des metrischen Mases.
Zum Schluß: **Messknechts vergrösserte Reciproken- u. Kreistafel** mit Text.

Erster Abschnitt.

ALLGEMEINES
und
zur vorläufigen
Uebersicht des Instruments.

Vorbemerkung.

Für die pädagogische Praxis glaubt Verf. diejenigen der Herren Collegen, welche auf den ersten Blick geneigt sein möchten, im Systeme ihrer Uebungen die im Kap. 2 abgehandelten Arbeiten für den Anfang zu überschlagen, unmasgeblich aufmerksam machen zu sollen einerseits darauf: wie sehr diese Orientirungs- und Vorarbeiten, besonders indem letztere von jedem Schüler auf der ihm eigenthümlichen Meßknechtstafel selbstthätig aus- und durchzuführen, solches Schülers Verständniß und Interesse für sein Universalinstrumentchen und dessen raffinirteste Ausbeutung gleich von vornherein in ersprießlichster Weise zu fördern geeignet seien; und andererseits: wie doch zugleich die betreffenden Prüfungs- und Justirungs-Constructionen nur aus belebenden Nutzanwendungen von lediglich ganz elementaren und bekannten geometrischen Gesetzen bestehen, und somit selbst für niederere Schulen als ein systemwidriger Vorgriff schwerlich erscheinen können.

Für die wirthschaftliche Praxis dagegen wird man sich die in den §§ 16 ff. behandelten Justirarbeiten allerdings ersparen können, dafern man seinen Knecht mehr nur als flotten Schätzungsgehülfen zu benutzen und demgemäs (z. B. bei Rechtwinkelabsteckungen und Höhenmessungen) auf ein halbes Procent ab und zu keinen sonderlichen Werth zu legen und folglich auch keinerlei Armatur durch Visirstifte u. dergl. zu seiner Verfeinerung nöthig hat.

Die § 12 empfohlene Vorschulung im desfallsigen mikrometrischen Sehen und Ablesen wird man sich für derlei gewöhnlichere Zwecke ebenfalls wesentlich erleichtern können dadurch, daß man von den für ältere Augen ohnehin nicht leicht erkennbaren kleinsten und feinsten Untertheilen der Meßknechtstabellen gar keine Notiz nimmt, just als wären sie gar nicht vorhanden; während wir eine solche Einübung des Auges, kraft deren dasselbe (mit oder ohne Glas) von jenen untersten Skalentheilen schätzungsweise noch das einzelne Zehntel mit möglichster Schnelligkeit und Sicherheit abzulesen im Stande sei, dem Schulpraktikum allerdings auf keine Weise erlassen möchten.

Vorwort u. Einleitung zur vierten Auflage

des größern oder Ingenieur-Meßknechts; zugleich als Schulcircular für die Mathematiker des mittlern u. höhern Unterrichtswesens humanistischer wie gewerblicher Art.

„Die Mathematik ist eine herrliche Wissenschaft, aber . . . !"
Vgl. S. IV des beigehefteten Auszugs der Brieftaschen-Einleitung.

Die ersten drei Auflagen unsers mathematischen Aschenbrödelchens, genannt „Ingenieur-Meßknecht" (nicht zu verwechseln mit dem, 1852—1862 bei Fr. Vieweg in ebenfalls drei Auflagen erschienenen, ältern u. kleinern Meßknechte) erfolgten Hand in Hand mit denen der math. u. polytechn. „Brieftasche" während der Jahre 1860—1864. Daß nun die von unterschiedlichen Freunden dieser kleinen Hülfsmittel dem Verf. seit jener Zeit wiederholt u. wachsend zugegangenen Anregungen zwecks einer weitern theils literarischen theils auch möglichst mehr finanziellen Popularisirung derselben erst gegenwärtig zu einen thatsächlichen Versuch geführt, wollen gedachte Freunde durch die wichtigern u. drängendern Obliegenheiten für entschuldigt halten, die Verf. in der Zwischenzeit auf dem Gebiete der speciellen Forstwissenschaft durchzuführen sich für verpflichtet erachtete. § 1.

Dagegen hat diese längere Frist mit ihren wiederholten Ermunterungen zur Folge gehabt, daß sie dem Verf. zu dem Entschlusse u. dann auch über die nicht eben kleine Mühe leichter hinweggebracht, den Knecht nochmals und zwar feiner graviren zu lassen: um damit auch Denen zu dienen, die sein Princip für sich oder ihre Schüler hin u. wieder bis zu den in seinem Wesen überhaupt liegenden genauesten Arbeiten auszubeuten wünschten. Doch ist damit der vorige kräftigere Stich, wie er der dritten Auflage obgedachter Brieftasche beigegeben, mit seinem größern u. deutlichern Zahlenwerke, eben dieserhalb, keineswegs antiquirt. Näheres hierüber ersehe man zunächst in § 14 mit dem Zusatze: 1) daß aus vorbemerktem Grunde gegenwärtigem Werkchen nur Knechte dieses feinern Stichs beigegeben worden; und 2) daß Vorsorge getroffen, beide Instrumentssorten unter der Bezeichnung: a) „vom kräftigen" u. b) „vom feinen" Stich separat u. billigst nachbeziehen zu können; sowie 3) daß beide im wesentlichen ganz übereinstimmend arbeiten, wenngleich ersterer der gedrängten Zins-, Renten- u. Mastafel entbehrt u. auf einigen Punkten um eine Decimale kürzer arbeitet.*) § 2.

Ob aber bei intensiverm Schulgebrauche solch ein feines Linien- u. Zahlenwerk nicht ein Augenverderber u. folglich dagegen ein ähnlicher Einwand zu erheben sei wie gegen die bekannten Miniaturausgaben der Klassiker? Verf. glaubt auf Grund langjähriger Erfahrungen, namentlich auch an seinen eigenen Augen, dies Bedenken entschieden verneinen und vielmehr seine Herren Collegen, insbesondere die der Gymnasien, darauf aufmerksam machen zu sollen § 3.

---

*) Beim Gebrauch der mit 100, 200 zc. überschriebenen Logarithmentafel dieses gröbern Stichs übersehe man nicht, daß man den „Numerus" ganz nach dem Sprachgebrauche ablesen soll; z. B. log. 104 als log. 100 u. 4; log. 114 als log. 100 u. 14; zc.

einerseits: daß jenes mehr u. weniger anhaltende Verfolgen eines in sog. Nonpareille-Schrift gesetzten Textes durchaus nicht in Vergleich zu stellen sei mit dem intermittirenden u. gymnastischen Gebrauche eines Instrumentchens fraglicher Art; sowie andrerseits: daß die Uebung u. Gewöhnung des Auges im mathematischen u. theilweise mühsamen oder mikrometrischen Sehen u. Schätzen zur wissenschaftlichen Erziehung des Auges überhaupt, ganz besonders aber für naturwissenschaftliche u. technische Fächer zu den diesfalls wesentlichen Erfordernissen gehört. Weshalb Verf. auch räth, dem Schüler den Gebrauch des jedem Knechte beigegebenen 2- bis $2^1/_2$mal vergrößernden Glases für gewöhnlich — außer bei notorisch schlechtem Auge od. Lichte, oder zu botanischen u. ähnlichen Beobachtungen — nur zur Prüfung u. Verschärfung einer etwa zweifelhaften Ablesung zu gestatten.

§ 4. Erscheint es aber nicht als eine Illusion, wo nicht gar als eine Arroganz Verf.'s, daß sein Aschenbrödelchen auch für höhere Schulen geeignet sein sollte? Dem also zweifelnd od. verneinend fragenden Collegen igend einer humanistischen od. gewerblichen Hochschule kann Verf. darauf nur mit dem Ersuchen antworten, das diesem Schriftchen beigeheftete Bruchstück über „Bedeutung, Stellung u. Cultur der prakt. Mathematik u. s. w." zunächst mit einiger Nachsicht eingehender durchzuprüfen und dann im Geiste der dasigen Andeutungen versuchsweise einmal mit einigen seiner besten Mathematiker das ganze Meßknechtspraktikum, auch das geodätische, cursorisch durchzumachen, und zwar soweit möglich mit der Doppelaufgabe, die geforderten Resultate dabei a) in der kürzesten u. schnellsten u. dann b) in der genauesten Weise zu erzielen. Findet er dann, daß seine jungen Freunde dabei weder an formal- noch an praktisch-mathematischer Einsicht u. Gewandheit irgend etwas Beachtenswerthes gewinnen konnten, so muß ich ihm allerdings das Recht einräumen, seine obige Zweifelsfrage zu bejahen.

§ 5. Mit ungleich größerer Zuversicht darf ich aber bei den mathematischen u. naturwissenschaftlichen Collegen der Mittelschulen u. ganz besonders der Gymnasien das Einverständniß voraussetzen 1) damit, daß, so verschieden auch vielleicht die speciellern Ziele u. Richtungen unsrer mannigfachen Institute seien, dennoch unser Aller Streben in Einem wesentlichen Allgemein-Punkte zusammentreffe, nämlich in der Erziehung einer von christlich-philosophischem Geiste getragenen möglichst lebens-praktischen Intelligenz; u. 2) damit, daß innerhalb dieser wichtigen Aufgabe auch die Mathematik u. Naturwissenschaft die ihrer eigenthümlichen Bildungskraft (s. S. III des angeschlossenen, in § 4 erwähnten Bruchstücks) gebührende wirksamere Stellung einzunehmen, beziehlich zu erstreben haben. Und wenn Dieselben dann auf Grund solcher Uebereinstimmung den Versuch machen, fragliches zu den rein gymnastischen wie rein wirthschaftlichen od. technischen Zwecken wissenschaftlicher Erziehung allseitig dienstbereites Aschenbrödelchen bei ihrer pädagogischen Praxis in gedachtem Sinne auszunutzen (vgl. z. B. S. VI—XI), u. wenn Dieselben dann auf Grund der dabei von ihnen zu beobachtenden Belebung u. Befruchtung ihres Unterrichts ein persönlicheres Intresse für dies Werkchen gewinnen dürften: so darf ich dann auch wohl zwecks einer etwa noch wünschbaren Weiterkultur desselben von Seiten solcher Meßknechtsfreunde durch möglichst direkte Rathgebung u. dgl. sicher nicht umsonst auf weitere freundcollegialische Unterstützung hoffen; eine Hoffnung od. vielmehr Bitte, welche Dieselben einem auf mehr als dreißigjährigen Beobachtungen inner dieser Gebiete beruhenden innigen Wunsche

beimessen wollen, dem Wunsche nämlich: Bei der großen Erziehungsaufgabe des Staates dem Antheile, welcher darin der Mathematik u. Naturwissenschaft unzweifelhaft gebührt, eine soweit nöthig wirksamere u. dankbarere Stellung vermitteln zu helfen.

Und insofern es nun hier u. da recht wünschenswerth, daß zum Zwecke des geodä- § 6.
tischen u. taxatorischen Theiles der desfallsigen Uebungen möglichst Viele der Schüler die dazu mehr u. minder nöthigen Armaturen, als 1) das „kleine Zeughäuschen" (S. 107) oder wenigstens dessen Visirnadeln, ferner 2) das Visirlineal (S. 118 od. 122), auf hartem Terrain auch 3) den Stativstock (S. 116) eigenthümlich selbst besitzen: so habe ich an die sachkundigen Freunde vorgedachter Zwecke auch noch die weitere Bitte zu stellen: mit zu helfen in der Aufsuchung u. Bekanntgebung von Ateliers, welche diese kleinen Apparatchen bei bester Qualität u. Zuverlässigkeit zum billigsten Preise liefern. Der dermalige Stand dieser Sache ist gegenwärtigem Werkchen in einer besondern „Notiz über Bezug u. Preis" angefügt.

Weshalb in nurgedachter Notiz zugleich auch der Weg angezeigt ist, auf welchem § 7.
die Remonte für etwa verlorene od. verbrauchte Knechte u. der Bezug von desfallsigen Reserven auf die vortheilhafteste u. schnellste Weise zu bewirken; wobei zur Vermeidung unvollkommener u. dann unberücksichtigt bleibender Bestellungen nochmals bemerkt wird, daß es Knechte von dreierlei Stärke gibt: 1) die gewöhnlichen oder „Mittelknechte", wie solche gegenwärtigem Werkchen beigegeben; u. 2) „schwache", welche um die Hälfte dünner u. 3) „starke" od. „Doppelknechte", welche um eben so viel dicker sind; Nr. 2 am besten in's Portefuille, Nr. 3 am besten zum Visirlineal. Und wenn dort wie hier nicht expreß der kräftigere Stich verlangt, wird stets nur der feine geliefert. — Bei Beurtheilung des Preises dieser Knechte wollen dann die Herren Collegen außer 1) den leicht übersehbaren Herstellungskosten derselben nicht unbemerkt lassen: 2) daß solch ein Meßknecht den Inhalt von nahezu **zehn** Bogen gewöhnlicher mathematischer Tafeln umfaßt u. dabei zugleich 3) ein nicht minder umfassendes Meß- u. Taxations-Instrumentchen bildet; dem Allem noch hinzuzufügen 4) daß solch ein Knecht, bei nur ganz gewöhnlicher Pflege, durch die ganze Schulzeit u. noch darüber hinfort auszuhalten, sowie 5) daß man ihn, wenn dennoch erheblich schmutzig geworden, durch sanftes Abwischen mit lauem Seifenwasser unschwer zu renoviren vermag.

Uebrigens ist Verf., absichts der hier u. oben angeführten u. in der beigefügten § 8.
Preisnotiz rekapitulirten Hülfsmittel, gegenüber jenen Schulen, welche Ursache haben bei Bedarf in größern Partieen noch einige weitere Erleichterungen zu wünschen, in der angenehmen Lage, ihnen solche leicht vermitteln zu können. Man wolle ihm nur das Vergnügen machen, Sich dieserhalb an ihn zunächst direkt zu wenden.

Endlich ist noch zu bemerken, daß demnächst ein kurzer, von Zeit zu Zeit (vielleicht alljährlich) zu erneuernder, aus etwa einem Bogen bestehender „Flüchtiger Führer durchs Meßknechtspraktikum" nachfolgen soll, der die Freunde des letztern in dessen mannigfache Arbeiten jederzeit auf's schnellste einzuweisen u. auch über obgedachte Bezugsverhältnisse auf dem Laufenden zu erhalten bestimmt ist.

Tharand, Ende 1869.

Der Verf.

Aus und zu dem

geometrischen Practicum des Ingenieur-Messknechts.

Fig. 1.



Fig. 2.

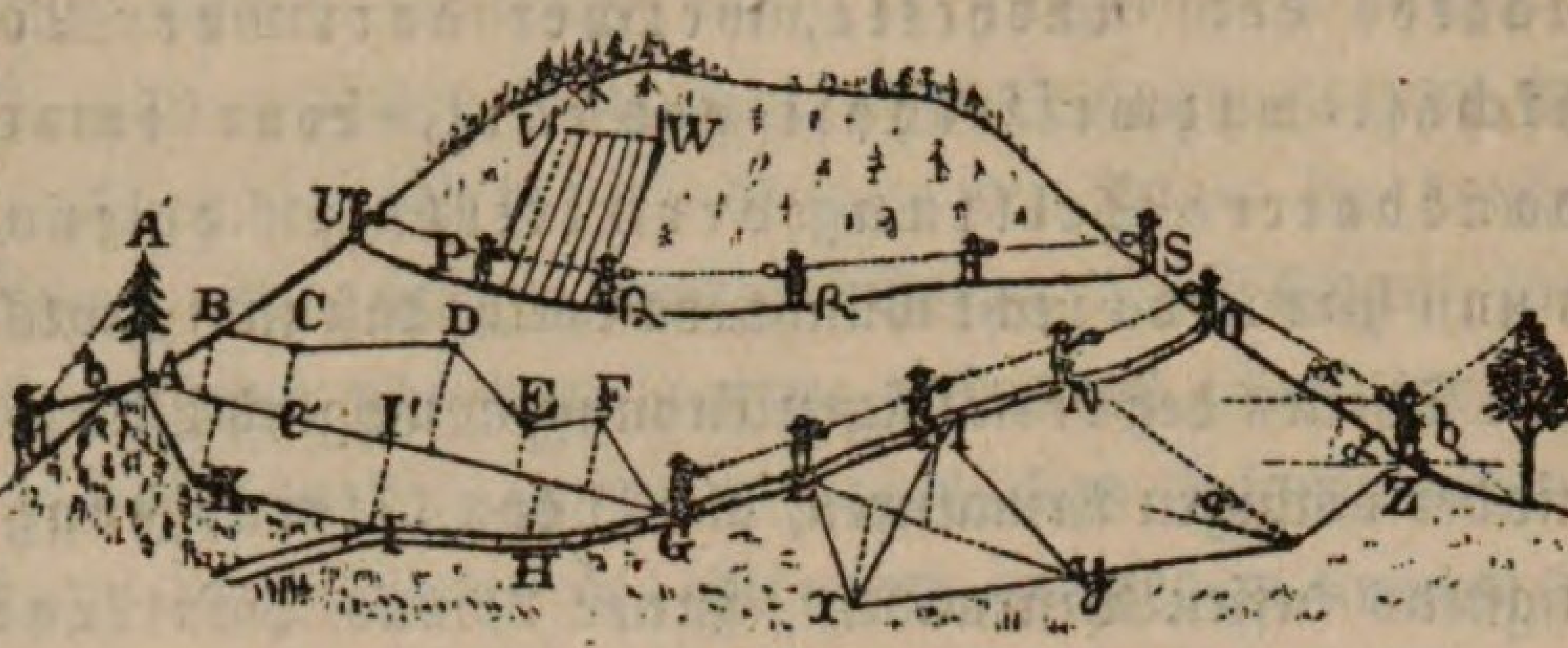


Fig. 3.



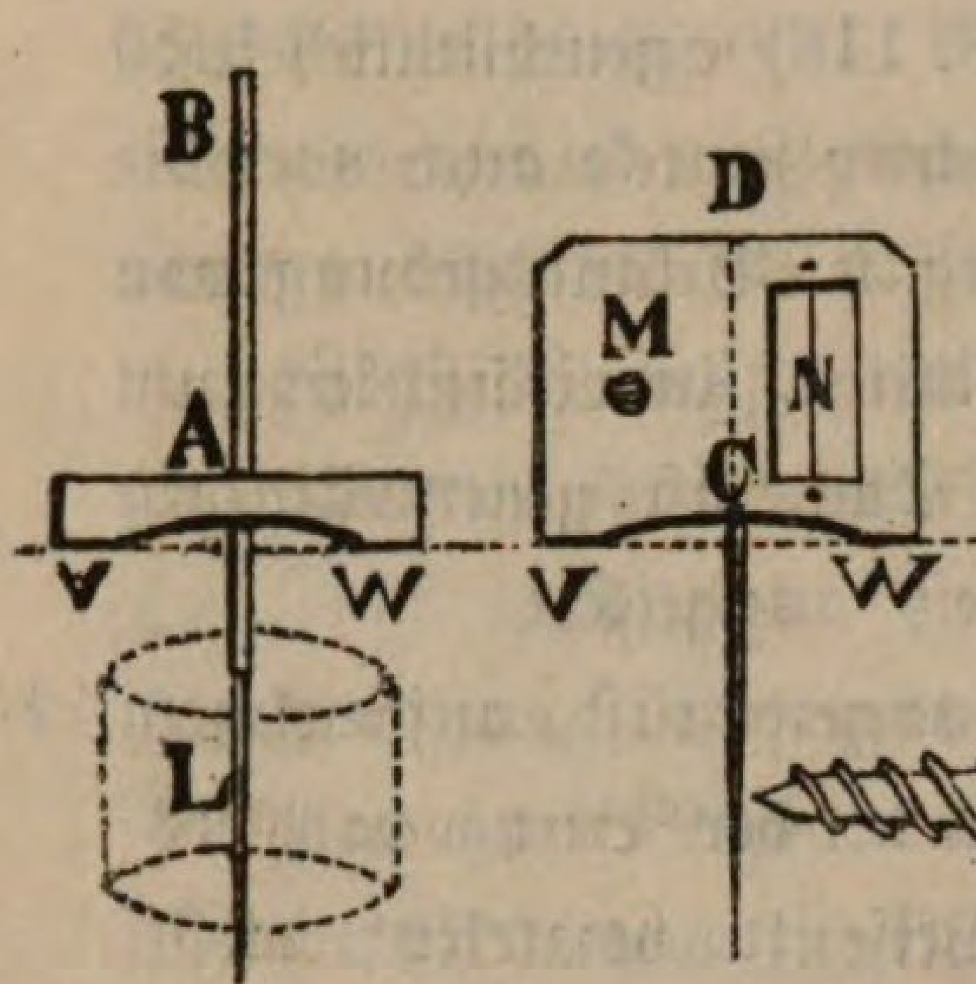


Fig. 4.

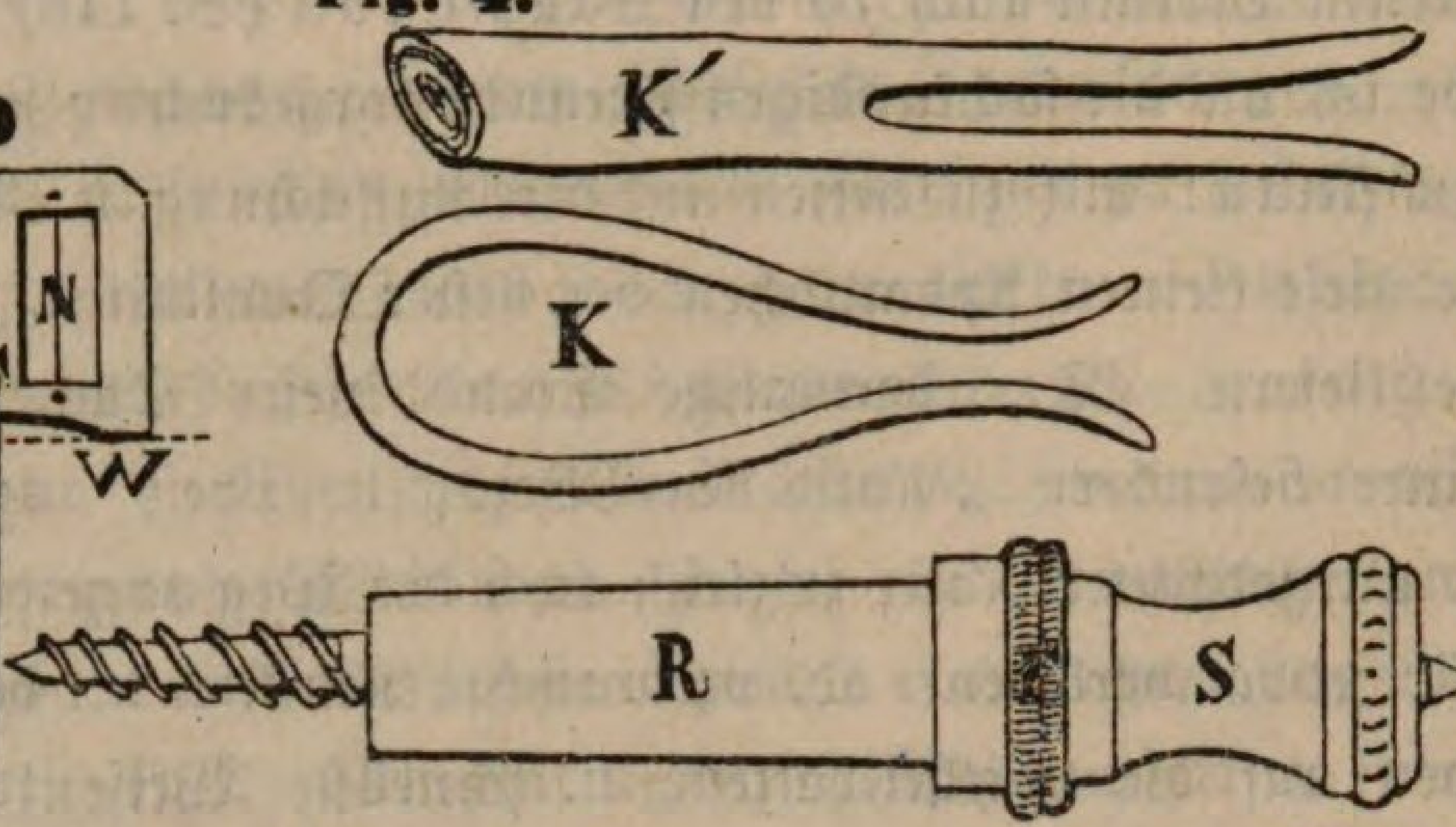


Fig. 5.

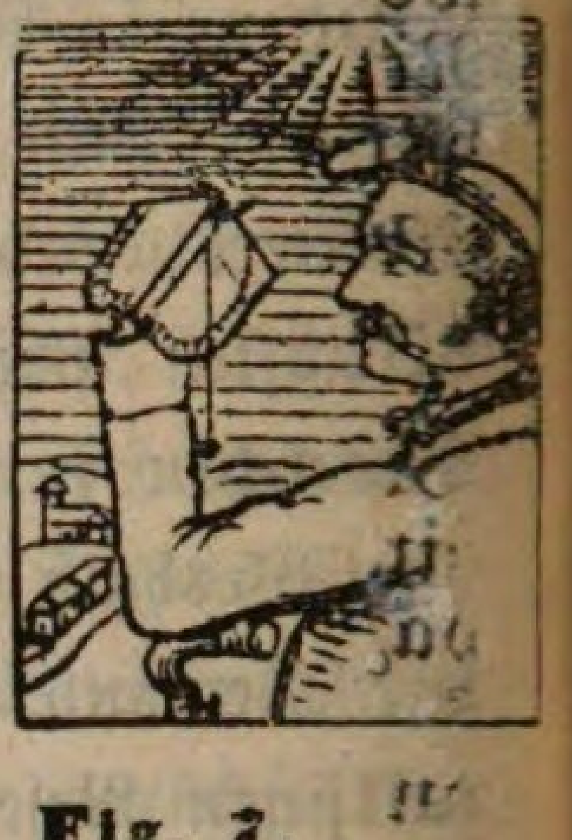


Fig. 6.

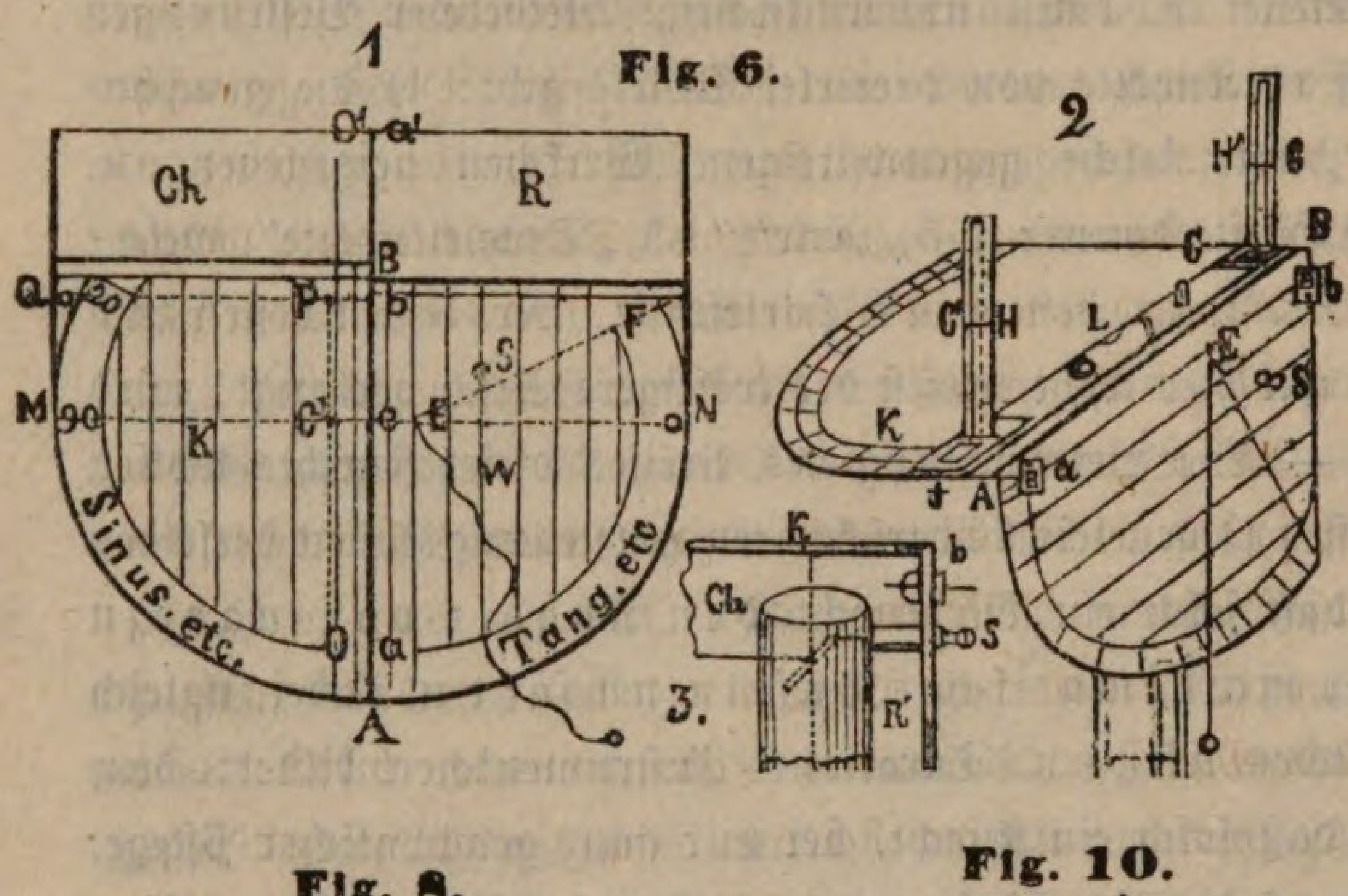


Fig. 7.

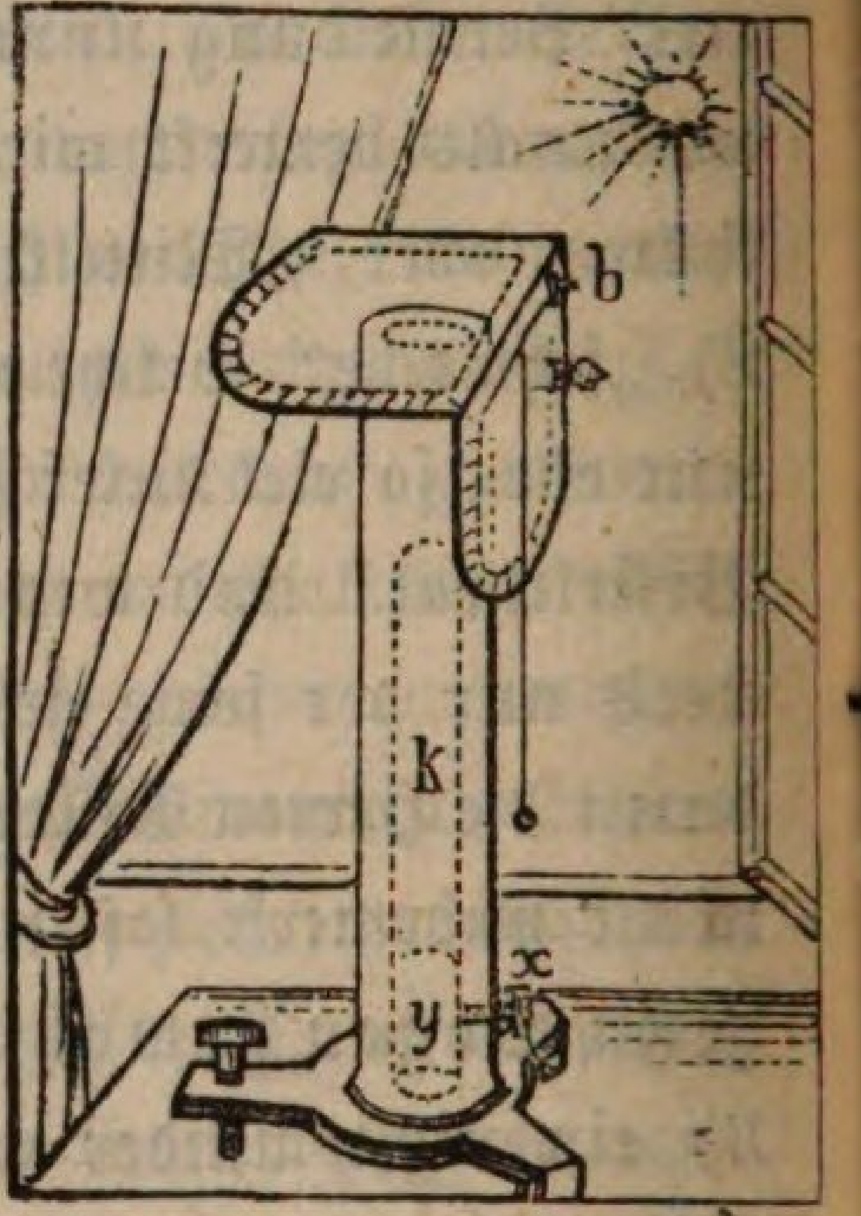


Fig. 8.

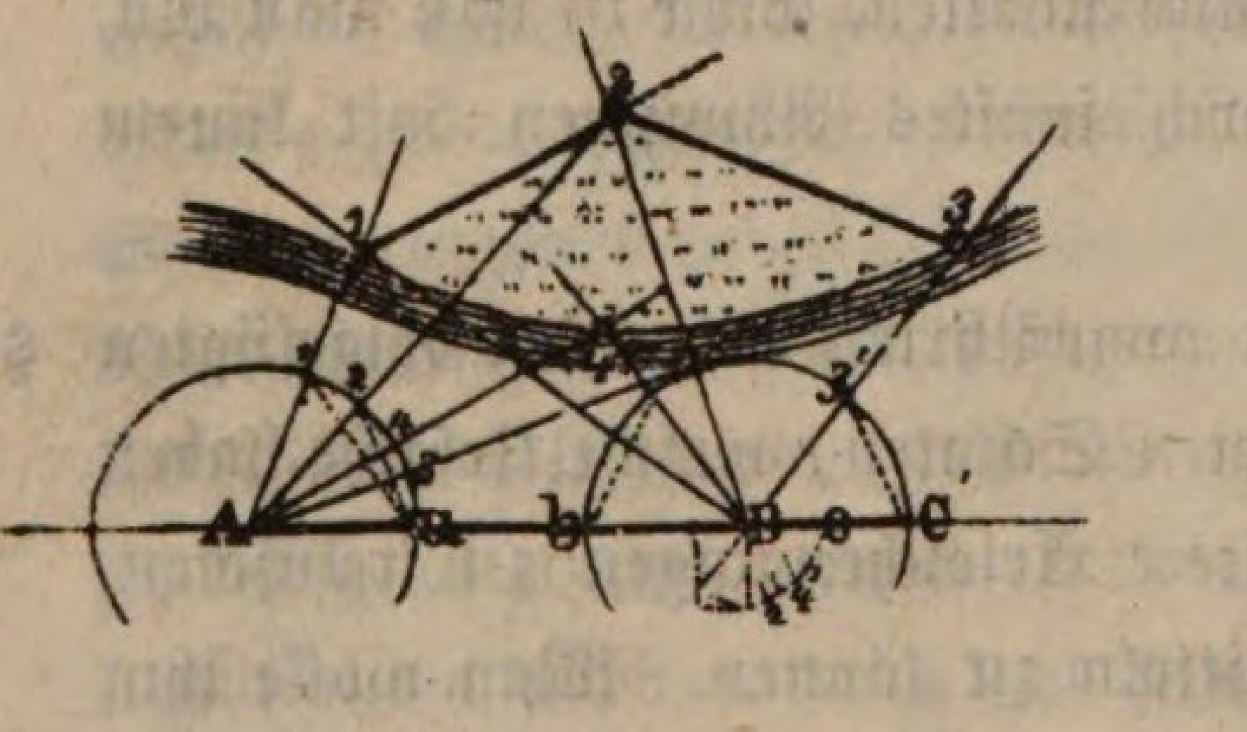


Fig. 10.

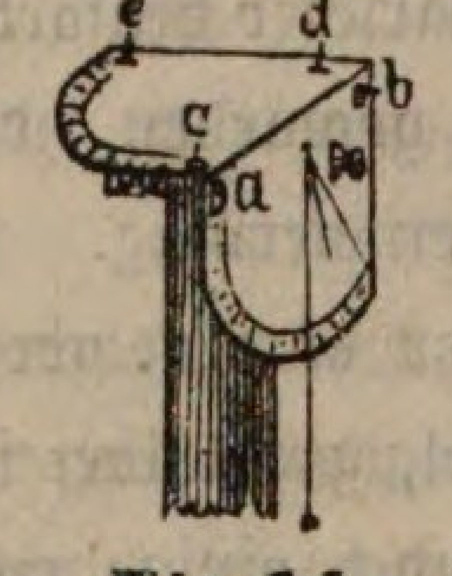


Fig. 13.

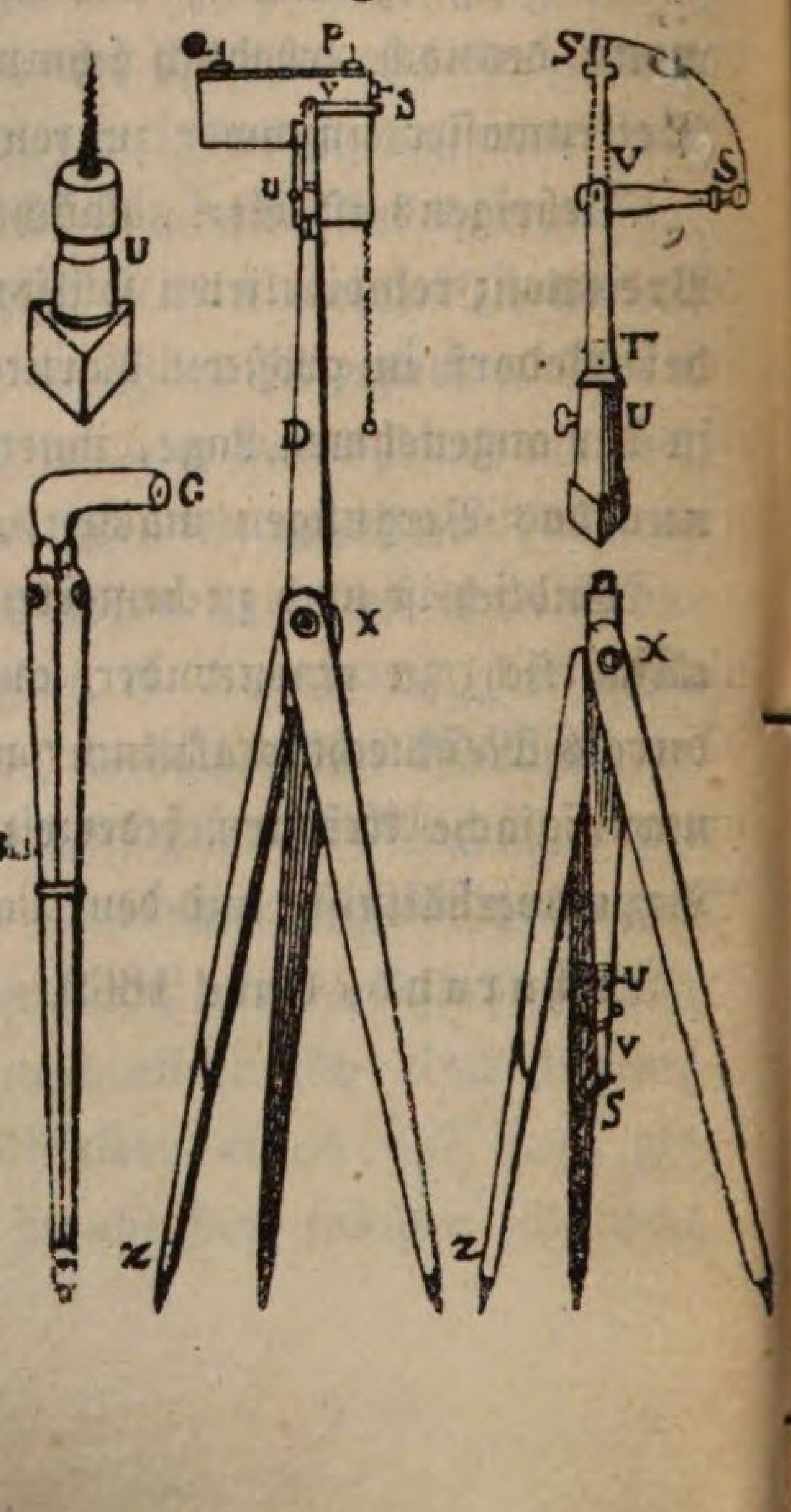


Fig. 11.

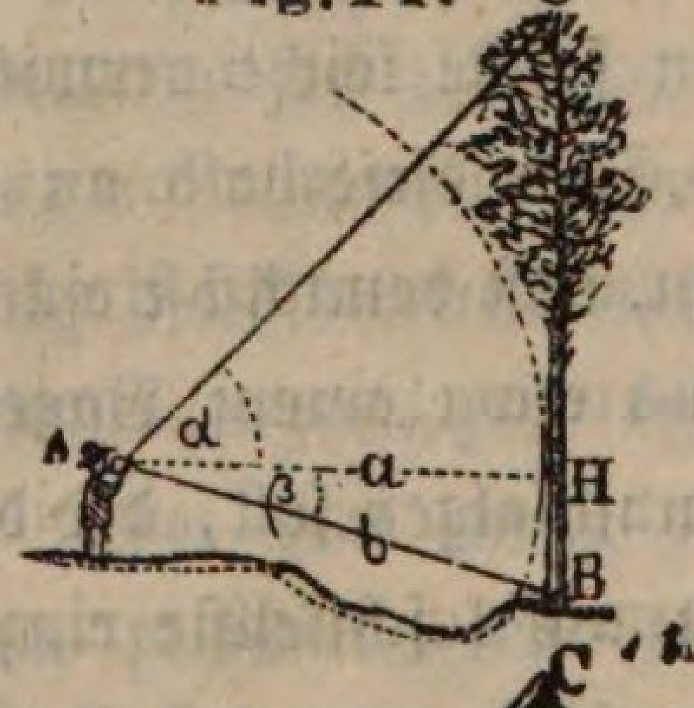


Fig. 9.

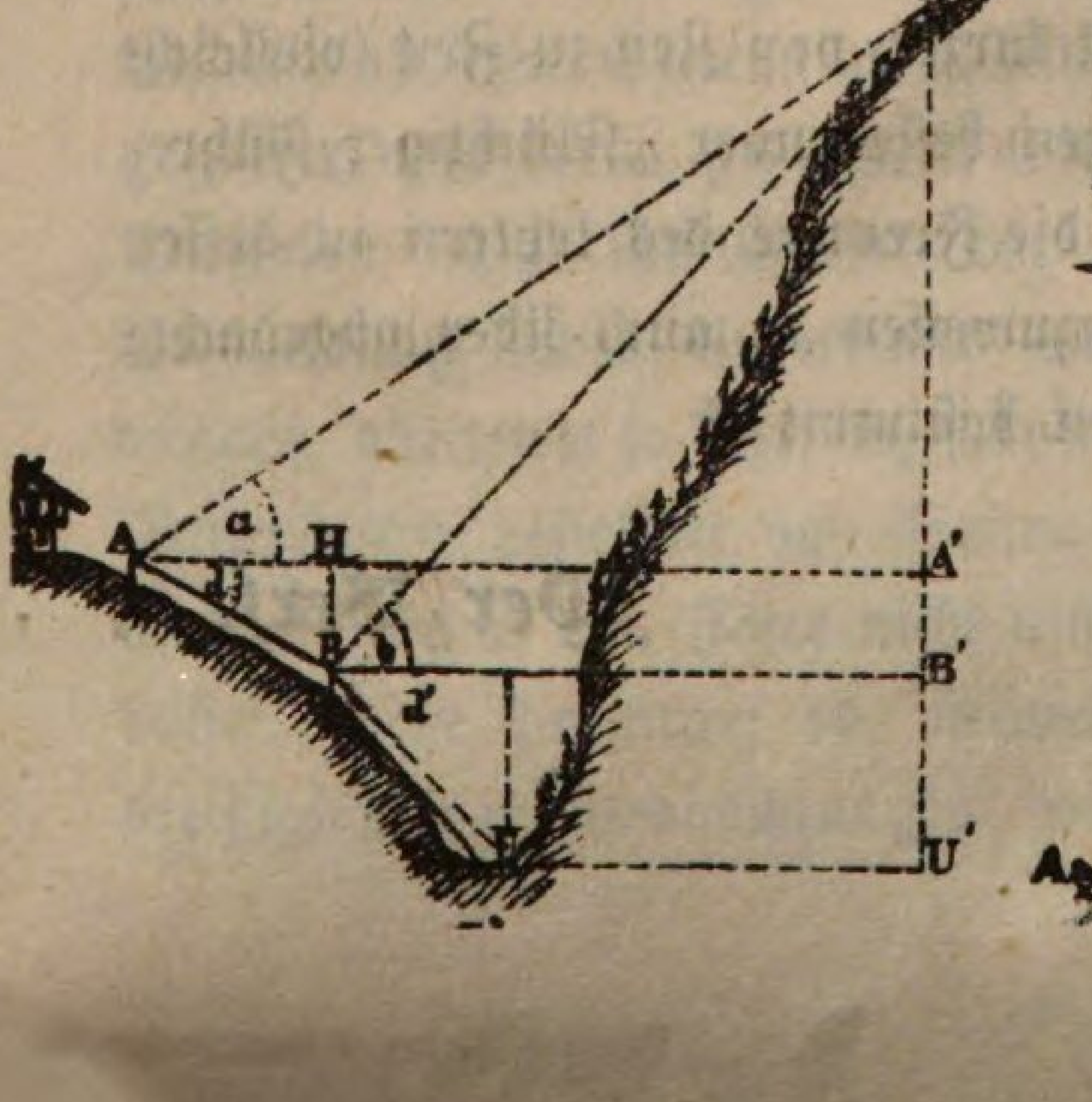
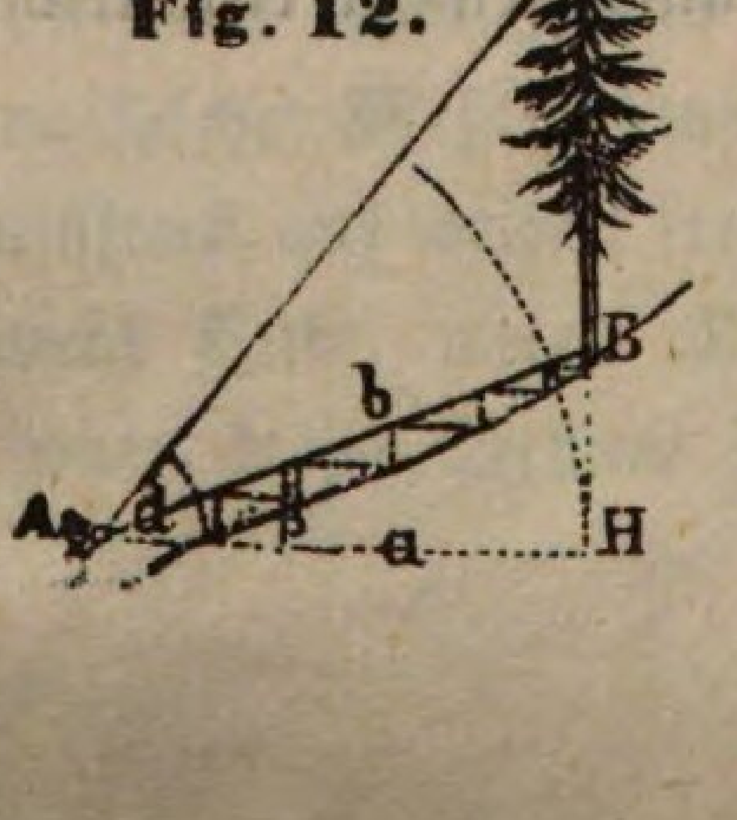


Fig. 12.



Kap. 2. Zur Uebersicht des Instruments und seiner Behandlung, Armirung und Justirung.

Wie man sich und seinen Freunden oder Schülern besagten (Ingenieur-) Meß-knecht, mit oder ohne mehr und weniger zubehöriger „polytechnischer Brieftasche", und zwar sowohl in schwächster, zum Freihand- und Brieftaschengebrauch geführlichster, ... in stärkster und zur Anwendung mit Stativ zweckmäßigster Ausführung auf die ...rtheilhafteste Weise zu verschaffen vermöge, wolle man aus dem Vorworte u. Schul-...culare ersehn. Gleiches gilt in bezug auf diejenigen Apparatchen oder diejenige ...rmatur, die man dem Knechte etwa noch beizufügen hat in jenen Fällen, wo man ...n nicht blos als Rechnungs- und flüchtigen Messungs- und Schätzungsgehülfen, ...ndern in letztrer Beziehung auch zu thunlichst genauern Arbeiten verwenden will; ...bei indeß für die weit aus meisten Zwecke seiner hipso- und dendrometrischen und ...ivellir- und Winkelkreuz- (Aufnahme und Absteckungs-) Praxis sein „kleines Zeug-häuschen" (§ 6, Nr. 1) in der Regel ausreicht; während das „große" (§ 6, Nr. 1 mit 2 und 4) nur zu den vollständigern Nivellir- und Aufnahme-Arbeiten nach der Meßtisch- und Theodoliten-Manier nöthig wird. — Und damit überhaupt unser Aschenbrödelchen oder vielmehr sein Herr nicht in jenen bekannten Küchenfehler verfalle, wonach die Brühe höher kommt denn das Fleisch: so wolle man dort, wo der Knecht in Verbindung mit einem Stative angewendet sein will und wo man ohne weiteres dazu den für manche Verhältnisse allerdings sehr angenehmen Stativstock (Fig. 13 und § 6, Nr. 3) für nöthig hält, doch erst versuchen, ob man nicht für seine Zwecke auch mit einem gewöhnlichen, unten mit Eisenspitze und hinlänglich großen Querdorn versehenen Kettenstab auskommen könne, an welchem sich mittels des Anschraubestiftes R des kleinen Zeughäuschens der Knecht so leicht und drehbar befestigen läßt, und welcher außerdem in dem weichen Terrain, in welchem wenigstens der Forst- und Landwirth gewöhnlich zu messen pflegt, durch Seitwärtsdrücken und Drehen im Boden jedwede Horizontal- und Vertikal-Stellung und Drehung in einer für die meisten Fälle seiner Anwendungen genügenden Weise ermöglicht. § 9.

Unentbehrlich ist das dreibeinige Stativ nur auf hartem Terrain. Wählt man zu solchem dann den Stock, Fig. **13**, so kann man in dessen hohlen Griff gleich auch mit die Klammern, Stifte, Diopter und Korkstückchen des Zeughäuschens und somit alles unterbringen, dessen man zur Armirung und Verfeinerung der Winkelkreuz- und Pendelwand etwa bedarf. Bei Umwandlung des Gehstocks, Fig. **13** No. 4 in das Stativ No. 6, schraubt man erst den Griff los und die Beinschrauben X etwas auf, zieht Zwinge Z und Ring ab, stürzt den Stock, und schlägt dessen Beine herum nach unten. Den Arm TS des innen befindlichen Stativkopfes stelle man so, daß, wenn dessen Stellschraube V auf der vordern Seite steht, dann der Schraubstift S rechts und die untere Stellschraube U (für die horizontale Drehung) links steht; damit alles möglichst bequem zur Hand sei. — Je höher man den Stock machen läßt, desto kürzer kann dessen prismatischer Kern D, desto fester dessen ganze Aufstellung werden. — Das Anschrauben des Knechts geschieht ganz wie beim bloßen Stabe mit Anschraubstift (Fig. 4, 6, 7, 10) mittels des durch die Pendelwand gebohrten Loches S (s. Nr. 1, Fig. 6), wobei man zur Schonung dieses Punktes der Tabelle (s. § 15) wie auch zur Herstellung einer sanftern Reibung nicht unterlasse, die Drehung des Knechtes um den Stift S zwischen zwei Scheibchen von Tuch oder Leder gehen zu lassen (S. Fig. 4 zwischen R und S). § 10.

Das Armiren des Knechts mit seinen Stiften oder Dioptern (Fig. 10) hat jedenfalls eher zu geschehen, bevor man ihn ans Stativ schraubt. § 11.

Bei Bildung des Würfeleck, sei es für den Freihand- oder für den Stativgebrauch, sei man stets bedacht, die auf dem Meßknechtsfutterale befindliche Regel zu beachten, wonach das rechte Oberfeld (R Fig. 6) ja nicht über das linke (Ch) zu legen versucht werde, was namentlich bei den stärkeren Knechten ein Ueberspannen der zu bildenden Ecke zur Folge haben würde.

Man hat demnach die Thätigkeit dieses seines fügsamen Brieftaschengehülfen zu unterscheiden in eine solche 1. als Rechnungs- und 2. als Taxations- und Meßinstrument, und in dieser seiner zweiten Eigenschaft wiederum a. als einfachen und b. armirten (d. i. mit Stiften, Dioptern 2c. verfeinerten) wie auch c. als Freihand- und d. als Stativ-Knecht.

Um einigermaßen gleich von vorn herein zu übersehen, was derselbe in ersterer Eigenschaft, d. i. als „Rechenknecht" seinem Herrn zu nützen vermöge, so wollen Diejenigen, die zur Zeit von seinem Tabellenwerke und dessen Vortheilen § 12.

(schnellster Ueberblick; keine Zwischenrechnung auch bei feinern Eingängen, vermöge unmittelbarer Okularinterpolation; kein zeitraubendes Umblättern, selbst bei gleichzeitiger Benutzung von 2, 3 und mehr verschiedenen Tabellen; ꝛc.) noch keine Kenntniß und Erfahrung und daher wohl Neigung haben, sich auf den ersten Blick von der anscheinenden Mühsamkeit des betreffenden Ablesungsgeschäftes abschrecken zu lassen: so wollen diese in ihrem eignen Interesse vor allem sich nur erst etwa ein Viertelstündchen lang die leichte Mühe nehmen, und die eigene Einübung in dies Ablesungswerk versuchen. Zum allerersten Anfang geschehe dies unter Mithülfe einer Bleistift- oder sonstigen Spitze, und allenfalls auch bei schwachem Auge oder Lichte unter Mitbenutzung des in § 6 des Circulars unter Nr. 7 angeführten billigen Leseglases.

Wir ersuchen Solche demgemäs, uns mit ihrem Auge bespielsweise jetzt in die Kreistafel K (s. Nr. 1 in Fig. 6 des Circulars) und zwar nur in deren eine und zwar dritte Abtheilung zu folgen, welche für's Decimal- wie für jedwedes oder allgemeines Mas die Durchmesser 12 bis 20, und für's Duodecimalmas die Durchmesser $14\frac{1}{2}$ bis 24 oder Umfänge 45 bis 77 (Zoll) umfaßt. Und indem wir uns hierbei im wesentlichen nur auf das Praktikum der einen und zwar der linken D-Spalte beschränken, wollen wir uns gleichzeitig einer abgekürzten Schreibweise bedienen, wonach: K. $12\frac{1}{4}$"? . . . soviel bedeute, als: „Welche Kreisfläche gehört zum Durchmesser $12\frac{1}{4}$ Zoll?"; und D. 1,04 □'? . . . „welcher Durchmesser (im folgenden nach Decimalzollen) entspricht der Kreisfläche von 1,04 Quadratfuß?" Also wolle man jetzt an den Knecht folgende Fragen stellen:

1) K. 13"? . . Zahl u. Strich 13 der D-Spalte zeigt sofort 1,33 □' od. 133 □".
2) K. $13\frac{1}{4}$"? . . Laut erstem Punkt unter 13 ohne weiteres 1,38 □' od. 138 □".
3) K. 13,6"? . . Laut 6tem Zehntelstrich unter 13 ohne weiteres 1,453 □' oder 145,3 □".
4) K. 13,66"? . . Laut geschätztem 6 Hundertelstrich unter 13 ohne weiteres 1,465 □' oder 146,5 □".
5) K. 136,6 Meter? . . Da zum 10mal so großen D ein 100mal so großes K, so folgt aus letzterem Resultate (sub 4) 14650 □-Meter.
6) K. 1,366 Ruthen? . . Da zum 10mal so kleinen D ein 100mal so kleines K gehört, folgt leicht aus 4) . . 1,465 □-Ruthen.

Oder, wenn man einen Probestamm, der genau 1,445 □' Grundfläche habe, angeben und aussuchen soll, und zwar 7) u. 8) nach Durchmesser und Umfang in Decimal- und 9) u. 10) in Duodecimalzollen, so fragt und ersieht man:

7) Dec. D. zu 1,445 □'? . . Laut Kreisskala $1,44\frac{1}{2}$ und linker D-Spalte antwortet letztere sofort hierauf: 13,56" oder 1,356'.
8) Dec. Umf. zu 1,445 □'? . . Laut rechter D- und nebenherlaufender Umf.-Spalte ist dies vorige D = 13,56 entsprechend einem Umf. von 42,6".
9) Duod. D. zu 1,445 □'? . . Laut Kreisskala bei $1,44\frac{1}{2}$ und rechter D-Spalte liest man aus letzterer sofort 16,34" und weiter.
10) Duod. Umf. zu 1,445 □'? . . gleich neben voriger Ablesung v. D = 16,34 als: Umf. 51,3".

Man bedenke nun, daß dies kleine, aber in den Augen Sachverständiger gewiß schon ziemlich inhaltsreiche Fragment aus dem desfallsigen Meßknechtspracticum an Raum auf der Tafel **kaum einen Quadratzoll** und an Zeit zu dessen hier dargestellter Nutzbarmachung **kaum drei Minuten** beansprucht.

Indem wir uns aber in Folgendem, wie bereits vorn bemerkt, lediglich die Aufgabe gestellt, für die mehr elementare Rechnungs-, Meß- und Taxations-Praxis des Ingenieur-, Bau-, Forst- und Landwirthschafts- und sonstigen verwandten Schul- und Geschäftswesens einen möglichst populären und rein praktischen Leitfaden in kurzen Regeln und Beispielen zu geben, müssen wir wegen der anderweiten Ausbeutung des Ganzen, und zwar sowohl in bezug auf dessen mathematisch-gymnastische und sonstige pädagogische Bedeutung und Benutzung, wie auch dessen anderweite polytechnische Anwendungen auf die „Einleitung" der fraglichen Brieftasche und deren Kapitel „Physik, Chemie, Mechanik, Maschinenlehre und Technologie" verweisen.

§ 13. **Zur Orientirung über die Vorderseite**

des Meßknechts ersuchen wir nunmehr dessen Freunde, denselben aufgeschlagen, wie Nr. 1 in Fig. 6 zeigt, vor sich hinzulegen und darauf zu unterscheiden und zu bemerken wie folgt:

Rechte und linke Oberecke R und Ch; wovon R im wesentlichen als Reciprokentafel dient und Ch als Tafel der Chorden (Ch) und Bogenhöhen (Bh).

Rechter und linker Rand, jener auf der Figur mit Sinus, dieser mit Tang. bezeichnet. Jener zeigt zu dem mit fettern Ziffern aufgeführten Gradmaße die Sinus- und Bogenlängen und die Segmentflächen, dieser die Tangenten-, Cosinus- und Secantenlängen.

Rechte und linke Wand K u. W (Fig. 6); im wesentlichen erstre von der Kreis- und letztre von der Wurzel- (und Potenzen) Tafel occupirt. Jene bildet bei den Aufnahmen und Absteckungen nach der Winkelkreuz- oder auch Theodolitenmanier zugleich die Horizontalwand oder das Meßtischchen, die andre (W) dagegen zugleich die Vertikal- oder Pendelwand beim Höhen- und Zeitmessen u. s. w.

Der zwischen K und W liegende Millimeter- und Transversalmasstab kann außer zum Auftragen von Winkeln und zum Zeichnen überhaupt, auch zum Messen gezeichneter Winkel (wobei namentlich die Ch.-Tafel sehr vortheilhaft mitzuwirken vermag), nebstdem aber auch zur Abnahme absoluter Masgrößen benutzt werden; doch darf letzteres für genauere Zwecke nicht geschehen, ohne ihn durch Vergleichung mit einem ganz exacten Millimeterstabe geprüft und (dafern er sich in der That beim Drucken, Aufziehen und Wiedertrocknen ein wenig verdehnt oder verkürzt haben sollte) durch Nadelstiche unter seinen Zahlen 10, 20, 30 ꝛc. ihm die für solche Zwecke dann nöthigen Justirpunkte beigebracht zu haben.

Die am äußersten Rande wiederholte Gradskala hat den Zweck, bei flüchtiger Benutzung des Knechts als Transporteur, also bei schnellen und groben Winkelauftragungen, ein direktes Anstechen der Winkel mittels einer beliebigen Nadel zu gestatten.

Endlich ist noch zu bemerken, daß sämmtliche trigonometrische (oder besser goniometrische) Werthe oder Linien, als: die Chorden und Bogenhöhen (Ch. und Bh. der linken Ecke), die Bogen und Sinusse (des linken Randes) und die Tangenten, Cosinusse und Sekanten (des rechten Randes), wenn man deren aufgeführte Zahlen ohne Komma oder als Ganze abliest, für den Radius r = 100 gelten, oder als in 100facher Größe ihres natürlichen (dem Radius 1 entsprechenden) Werthes. So z. B. liest man aus dem linken Rande den Sinus von 6 Grad, hundertfach oder beispielsweise für den Radius 100 Fß. als 10,5 Fß.; einfach als 0,105; aus der rechten Ecke die Chorde von 12 Grad hundertfach als 20,92, einfach als 0,2092; deren Hälfte (= sin. 6°) sonach = 0,1046.

Die Rückseite § 14.

dagegen ist im wesentlichen durch die Logarithmentafel ausgefüllt, welche gestattet, für Eingänge bis zu 5 Ziffern das Gesuchte ebenfalls bis zu 5 Ziffern abzulesen, wobei die letzte nur bis auf höchstens 2 Einheiten unsicher sein kann.

Die im ersten Kapitel § 7 erwähnten separaten (ohne Brieftasche zu beziehenden) Knechte entstammen übrigens einem neuesten, in dieser Beziehung noch etwas feinerem Stiche, welcher auf der Rückseite auch eine vollständigere (für preußisches und österreichisches Fuß- und Meter-Mas dienende) Fallhöhen- und Fallgeschwindigkeits-Tafel, nebst einer gedrängten Zins- und Renten-Tabelle und (am Außenrande) auch eine compendiose Mas-Vergleichungs- und Reductions-Tafel enthält; während die der Brieftasche beigegebenen Instrumentchen dafür etwas kräftiger im Zahlenwerke gehalten sein konnten; worauf seine (pädagogischen wie praktischen) Meßknechtsfreunde aufmerksam zu machen V. deshalb für nöthig findet, weil für manche Verhältnisse die eine, für manche die andre Ausführung als die zweckmäßigere erkannt werden dürfte.

Zins- und Renten-Rechner, Geometer und Mechaniker wollen nicht übersehen, daß sie außerdem für die ihnen wichtigern Werthe links und rechts der Logarithmentafel auch siebenstellige Logarithmen nebst den Faktoren zur Verwandlung der gemeinen in natürliche und umgekehrt finden.

Der am obern Rande der Rückseite querlaufende Centimetermasstab kann zur unmittelbaren Messung entsprechender Dimensionen verwendet werden, und zeigt außerdem, was sich zu merken bei flüchtigen Schätzungen von derlei Dimensionen mitunter nützlich ist, daß die Breite des ganzen Meßknechts nahe 22 Centimeter, die des zusammengeklappten also ein um 1 Centimeter zu großes oder ein dem entsprechend reichliches Decimeter ausmacht.

Als nützliches Seitenstück zu diesem Centimeterstabe zeichne man nun noch auf den obern Rand der Vorderseite, von der Mitte aus nach links und rechts, seinen landüblichen Zollstab selber auf!

§ 15. Durch vielen Gebrauch schmutzig gewordene Knechte können, wie bereits § 7 bemerkt, durch vorsichtiges Waschen mit lauem Seifenwasser meist wieder hinlänglich klar gemacht werden.

Eine dauernd undeutlich gewordene oder verletzte Stelle wird man übrigens in der Regel durch eine andere Stelle derselben oder einer verwandten Tafel zu ersetzen vermögen; so z. B. in der Sinus- und Cosinus-Tafel durch Zuhülfenahme der Chorden und Bogenhöhe; und bei der Logarithmentafel dadurch, daß man nöthigenfalls den gegebenen Numerus mit 2 multiplicirt oder dividirt und dann den dazu gefundenen Logarithmus um den log. 2, d. i. um 30103 mindert resp. mehrt; und so umgekehrt bei gegebenem Logarithmus und gesuchtem Numerus.

Das **Durchlochen** der Pendelwand, wie es bei Anwendungen mit Stativ nöthig wird, hat an einer solchen Stelle (S Fig. 6) statt zu finden, 1. daß der Knecht zur Beobachtung der Tiefenwinkel u. dgl. eine hinlängliche Neigung gestattet (man kann indeß die Depressionen, durch Visiren in umgekehrter Richtung d. i. von B nach A Fig. 6, auch durch denselben Quadranten wie die Elevationen bestimmen) und 2. daß das betreffende Loch S nicht etwa die Logarithmentafel an dieser Stelle unbrauchbar mache. — Zu dem Ende versehe man eine Nähnadel von der Stärke der Visirstifte des Zeughäuschens mit einer Haselnuß-großen Siegellackkuppe. Nun haben die der Brieftasche beigegebenen Tafeln zwischen der zweiten Cw.- und dritten Qw.-Spalte (gleich unterhalb Cw. 620) ein schwarzes Ringelchen. Dieses durchsteche man vorsichtig mit jener Nadel, um zu sehen, ob es, wie in der Regel, jenseits mit einen indifferenten Punkte der Logarithmentafel correspondirt, oder ob man ausnahmsweise ein wenig daneben zu gehen habe. Nachdem man es dann kräftig durchgestochen, erweitert man es mit der Spitze S' des Anschraubstiftes des Zeughäuschens von vorn und hinten vorsichtig so weit, daß der Knecht sich bequem genug an jenem Stifte anspießen läßt. — Die § 7 und 13 erwähnten Knechte des neuesten Stichs haben diesen Punkt in der Z-Spalte und zwar in der Nähe der Ziffer 4 der Zahl 245; werden übrigens gleich entsprechend durchlocht ausgegeben.

Bei **Verwandlung der Tafel** (1 Fig. 6) in den Visirkörper (Fig. 3, 5; 2 Fig. 6, 7) achte man auf die Warnung am Grunde des Futterals, und lege also die rechte Oberecke oder die Reciprokentafel R stets unter die linke oder Chordentafel Ch; wie bereits schon § 11 hervorgehoben ward.

Das **Festhalten** dieser Formverwandlung geschieht beim Freihandknechte mit den Fingern, beim Stativknechte dagegen entweder mit der Drahtklemme K des Zeughäuschens (Fig. 4), oder in Ermangelung dessen mit einem aus einem grünen Zweigstückchen schnell geschlitzten Klämmerchen K'.

Je länger das **Pendel** und je feiner sein Faden, desto exacter dessen Arbeit. Bei unruhiger Luft empfiehlt sich, dazu ein Reserveloth mit anzuhängen. Wer den Pendelfaden zugleich als **Halbsekundenpendel**, etwa zur Schätzung der Distanzen nach dem Schall (je eine Halbsekundenschwingung = **83** Meter oder 1/90 geogr. Meile) oder der Wassergeschwindigkeit ꝛc. gebrauchen will, sorge dafür, daß, wenn es über die Kante a Fig. 14 gelegt wird, seine dann noch herabhängende Länge von der Ecke a bis zum Mittel des Lothes g genau gleich **248½** Millimeter (des nach § 13 justirten Masstabes) beträgt. Das Loth soll nicht mit der Breite gegen die Luft und nicht in Bogen über 20 Grad schwingen.

Fig. **14**.



Das **correcte Anlegen des Pendels** beim Höhenmessen u. dgl. aus freier Hand (Fig. 2, 3, 9, 11) wird wesentlich befördert, wenn man den Arm recht ausstreckt und während des Abkommens allmälig langsam wendet.

Rücksichts der vom Mechanikus zu liefernden **Armirungsstücke** (Zeughäuschen, Visirlineal und Stativstock) und deren Prüfung und Behandlung siehe weiter unten in den betreffenden Kapiteln.

Prüfung und Justirung der Horizontalwand

zum Gebrauch als armirter (Recht-) Winkelkopf u. Horizontalwinkelmesser.

§ 16. Die beiden blosen Schnittkanten AB und BQ Fig. 6 gestatten allerdings das Einvisiren und Abstecken rechter Winkel mit einer in gar vielen Fällen schon ausreichenden Genauigkeit; und wie man dies selbst mit dem Freihandknechte bewirken kann, wenn man einen gleichzeitig mit visirenden Gehülfen zur Seite hat, versinnlicht Fig. 1. Wer aber seinen Knecht auch als ein etwas feineres

Winkelkreuz und — so zu sagen — als Taschen-Theodolit zu benutzen wünscht, wie Fig. 6 und 10 andeuten, der nehme einen äußerst scharf gespitzten Bleistift, einen Zirkel mit zwei scharfen Spitzen, ein gutes Lineal und die sub § 15 erwähnte Nadel zur Hand und bewirke damit folgende zwei Vorbereitungen der Horizontalwand.

Erstens. Prüfung, Justirung u. Durchlochung der drei Winkelkreuzpunkte O, P und Q Fig. 6. — Den „ersten Radius" des Horizontalkreises, d. i. die durch die Nullpunkte O und das Centrum C und das Ringelchen P gehende Linie, verlängere bis an den Rand O'; setze dann den Zirkel in den Mittelpunkt des im Zwickel Q befindlichen Ringelchens, öffne ihn just so weit, um bei O' die verlängerte Linie anstechen zu können, stich dieselbe Linie eben so ein zweites Mal zwischen P und O an und suche von der Entfernung beider Stichpunkte die Mitte, welche genau mit dem Centrum des Ringelchens P zusammenfallen wird, wenn keine Verziehung stattgefunden hat. Wo nicht, so nimmt man den neben P gefundenen als den richtigen an und durchsticht nun mit obgedachter Nadel recht vorsichtig senkrecht diesen und die beiden andern dergestalt, daß die dann einzusetzenden Visirnadeln c, d, e Fig. 10 (= B des Zeughäuschens Fig. 4) mit beiden Enden (VW Fig. 4) ihres Querbalkens scharf aufsitzen können. Daß man bei etwas zu lockerem Sitzen unten ein Korkstückchen (L Fig. 4) als Mutterchen wirken lassen kann, war bereits sub a § 5 bemerkt. Man nimmt dazu am besten durchgeschnittene Apothekenkorke.

☞ Und daß man bei dieser und den **folgenden** Constructionen und Zurichtungen mit der **größten Akkuratesse**, deren man fähig, verfahren müsse, braucht wohl eigentlich nicht erst bemerkt zu werden.

Zweitens. Prüfung und Centrirung des Horizontalkreises. § 17.
Ganz wie vorher von Q aus, fälle jetzt von M oder vom Punkte 90° ein Loth auf den ersten Radius OO' (Fig. 6) und betrachte den danach gefundenen Mittelpunkt als das vorläufig justirte Centrum C'. Prüfe nun mit dem Zirkel, ob die beiden Radien CO und C90 gleich lang geblieben, der Kreis also sich nicht etwa elliptisch verzogen habe. Im letztern Falle verbinde man die Punkte 90 und O vom äußern Bogen der Gradskala durch eine feine Linie, suche deren Mitte, beschreibe aus derselben mit deren Hälfte als Radius einen kleinen Bogen bei C und suche in diesem Bogen denjenigen Punkt, der am genauesten gleich weit vom Außenbogen der Gradskala (bei 90 wie bei O). Welcher Punkt nun mit der mehrgedachten Nadel ebenfalls recht exact und senkrecht zu durchstechen ist. — Eine mit der Zeit etwas convex gewordene Horizontalwand läßt sich meist mit bloßer Hand genau genug wieder eben biegen; außerdem hilft: einige Tage Liegenlassen an feuchtem Orte und dann Trocknenlassen unter angemessen starker Pressung.

Prüfung und Justirung der Pendelwand

zum Gebrauch als armirter Höhen- u. Baummesser, als Zeitmesser u. Niwo.

Es genügt zu diesem Behufe, sich zu versichern, daß die zur Visirkante AB Fig. 6 § 18.
parallel laufenden fein gravirten Richtlinien ab noch exact rechtwinklich zum ersten Radius EN (oder E Null) sich befinden; und wo nicht, sie demgemäs zu justiren. Man nehme zu diesem Ende das im § 16 gebrauchte Werkzeug wieder zur Hand; verlängere zunächst den ersten Radius NE (vgl. 1 Fig. 6) exact durch die Mitte des Pendelaufhängpunkts über die Kreistafel weg nach M hin; setze den Zirkel in einen der Durchschnittspunkte c, wo dieser erste Radius eine der gravirten Richtlinien durchschneidet; schneide darauf nach N und M zu gleiche Stücke ab und beschreibe von diesen beiden Endpunkten aus in a und a' Kreuzbogen, deren exacte Verbindung aa' die Normale für die betreffenden Richtlinien bildet. Geht sie zu letztern nicht genau parallel, so markire man sie mit einem recht harten Bleistifte deutlicher und dauerhafter, und durchsteche sie mit mehrgedachter (siegellackbeknopfter) Nadel äußerst genau und senkrecht nicht blos an ihren Endpunkten a und b, sondern auch (wegen besserer Beobachtung der Schattenlinien bei Zeitmessungen) einigemale zwischen a und c, wobei es nicht nöthig ist, daß diese Durchstiche genau in der fraglichen Linie, sie können vielmehr eben so gut sämmtlich über oder unter derselben liegen; wenn sie überhaupt nur unter sich mit oder neben der festgestellten Normal-Richtlinie eine genaue Parallele bilden. Zur Armirung derselben verwendet man dann beim Freihandgebrauche am zweckmäßigsten die Visirnadeln B, beim Stativgebrauche dagegen die Diopter D des Zeughäuschens (Fig. 4). —

§ 19. **Zum Visiren ohne Stifte,**

mittels der bloſen Schnittkanten — ſei es zum Rechtwinkelabſtecken aus freier Hand (ſ. S. 6, Fig. 1) oder zu derlei Höhen- und Tiefenmeſſungen (Fig. 3, 9, 11, 12) — genügt es, ſich zu überzeugen, daß die beiden Schnittkanten der Horizontalwand mit den nach § 16 juſtirten Winkelkopflinien (OPQ Fig. 6; cde Fig. 10) genau genug parallel laufen, was ſich immer leicht und genügend erweiſen wird. Dabei ſoll freilich auch die Kante AB Fig. 6 zu der nach § 18 beſtimmten Richtlinie ab parallel ſein. Eine kleine Abweichung hiervon wäre indeß bei Höhenmeſſungen, wie ſie Fig. 11 und 12 andeuten, ziemlich indifferent; da nach bekannter Regel (Baumhöhe BC Fig. 11 = Summe der Höhen- und Tiefentangente, und BC Fig. 12 = Differenz der beiden Höhentangenten) der etwaige Fehler in beiden Ableſungen ſich theilweis tilgen muß. — Immerhin iſt's aber zu empfehlen, daß unſer kleiner oder großer Meßknechtsfreund ſich vergewiſſere, ob rückſichts ſeines Inſtruments bei der Fabrikation und Ausgabe auch in dieſer Beziehung kein Verſehen vorgekommen. Im (unwahrſcheinlichen aber doch möglichen) ſchlimmern Falle hätte er dann die Correction der betreffenden Schnittkante mittels eines äußerſt ſcharfen Federmeſſers bei über einander geklapptem Knechte oder aber deſſen Umtauſch zu bewirken.

§ 20. Beim Viſiren ſelbſt hüte man ſich vor dem Fehler, daß man meint, wenn man ohne Stifte und alſo blos mit den Kanten viſirt, von letzteren noch etwas ſehen zu müſſen. Vielmehr müſſen dabei deren Endpunkte, z. B. A und B Fig. 6, wie Viſir und Korn eines Gewehrs ſowohl einander als den Zielpunkt decken. Im gegentheiligen Falle würde bei Höhen- wie bei Tiefenviſuren der Pendelfaden an der Grad-, Tangenten- und Sekantenſkala ſtets zu große Werthe angeben. Uebrigens kann man zu derlei Zwecken ſtatt der Schnittkante AB auch gleich die ganze Horizontalwand benutzen, die dann ſo zu richten (Fig. 3), daß dieſe Fläche ſich juſt in eine Linie und dieſe ſich auf den Zielpunkt projektirt.

Für den Freihandgebrauch zu Höhenmeſſungs-, Elevationsabſteckungs-, Niwovergleichungs- und ähnlichen Zwecken iſt es nun zum Schluß noch nothwendig, ſich durch einige, bei ruhiger Luft anzuſtellende Uebungen die — bei nur einigermaſen ruhigem Blute unſchwere — Kunſt anzueignen, in der Weiſe, wie Fig. 3 andeutet (mit thunlichſt geſtrecktem Arme; bei Tiefenviſuren über 25° mit dem rechten, und in umgekehrter Richtung), die fraglichen Elevationen und Depreſſionen ſo konſtant zu beobachten, daß die einzelnen in der Gradſkala abgeleſenen Pendelſtände von deren Mittelwerthe nicht mehr abweichen, als um ½° ab und zu. Wobei als Fingerzeige noch zu beachten: 1) Bei Anfang der Viſur, wenn das Pendel noch unruhig, iſt daſſelbe mit der freien Hand erſt zur Ruhe zu bringen und 2) daſſelbe weder anliegen noch zu weit abhängen zu laſſen; und 3) um nach vollbrachter Viſur den Faden zum correcten Anlegen zu bringen, iſt der Knecht langſam, ja nicht ruckweiſe, und unter fortwährendem Innehalten des Abkommens zu wenden.

§ 21. Gleichwie man in nur gedachter hipſometriſcher Praxis aus freier Hand dadurch, daß man derlei kurze Beobachtungen einigemale repetirt und aus deren Reſultaten das Mittel nimmt, fragliche Elevationen unſchwer bis auf den Viertelgrad und ſomit Baumhöhen bis auf den Fuß genau zu beſtimmen vermag, vollends beim Mitgebrauch der Zeughäuschen-Viſire, ſo wird man auch, bei gehöriger Beobachtung der in den vor- und nachſtehenden Paragraphen vorgetragenen Regeln, auf den anderen Gebieten der Meſſungs- und auch der Rechnungs-Technik dieſem ſeinem „Aſchenbrödelchen", wo es darauf ankommt, nicht minder leicht einen Genauigkeitsgrad abzugewinnen vermögen, der nach V.'s Erfahrungen in der Regel um ein Weſentliches dasjenige zu überſteigen pflegt, was bei nur oberflächlicher Bekanntſchaft damit die Meiſten von ihm beanſpruchen und erwarten zu dürfen geglaubt.

☞ Ueber Prüfung und Behandlung der zum vollkommenen geodätiſchen Meßknechtspraktikum etwa noch nöthigen Inſtrumentchen — Zeughäuschen, Stativ und Viſirlineal — findet ſich das Nöthige im Abſchnitt: „Geodäsie."

Zweiter Abschnitt.

Aus der

ARITHMETIK.

Vorbemerkung.

Während in rechnungstechnischer Beziehung die Wirksamkeit nachfolgend arithmetischen Praktikums ziemlich zu Tage liegen dürfte, so könnte dagegen behufs dessen intellectuell-gymnastischer Be- und Ausnutzung vielleicht nicht ganz überflüssig erscheinen, zu bemerken, daß die erfreulichsten und nachhaltigsten Erfolge der Art, nach V.'s Erfahrungen, in der Regel dadurch zu erzielen, daß man, sobald der Schüler in je einem der betreffenden Rechengebiete (der Quotienten, der zweiten und dritten Potenzen und Wurzeln, der Logarithmen 2c.) in der gewöhnlichen Weise genügend heimisch geworden, demselben dann sofort die Aufgabe stellt, auf dem Grunde dieser seiner neuen Erkenntnisse sich nun auch die flottere Meßknechts-Rechentechnik selber auszudenken und einzuüben, und zwar, wo irgend thunlich, zu doppelten Wegen so, daß das aus der einen Stelle der Meßknechtstafel abgelesene Resultat durch eine andere Stelle derselben entsprechend leicht kontrolirt werden könne; als z. B., um dies an einem der allereinfachsten Fälle zu zeigen, den Werth des Quotienten $^5/_{24,33}$ mittels Reciprokentafel: einmal als $^1/_{4,866}$ und dann auch als $^1/_{24,33} \times 5$; u. dergl. m.

Zu derartigen und verwandten — für Schulen der verschiedensten Grade passenden, weil leicht mehr und minder schwer zu gestaltenden — Uebungen wird namentlich auch das metrologische Kapitel ein Contingent zu liefern vermögen, das sich nicht allein durch seine unmittelbare und fruchtbare Verknüpfung mit dem frischen Leben, sondern auch dadurch empfiehlt, daß es die mannigfaltigsten Veranlassungen bietet, zu einer recht flotten und gewandten Ausnutzung der betreffenden Hülfen, insbesondere der Reciproken-, Potenz- und Wurzeltafel anzureizen und den Werth solcher Gewandtheit klar zu machen. Allerdings setzt dies metrologische Praktikum in der nachfolgend dargestellten Weise die Mitwirkung des vollständigern Tabellenwerks der „polytechnischen Brieftasche" voraus. Indeß lassen sich die allermeisten dieser Fragen auch durch die im I. Abschnitt § 7 u. 13 erwähnten Knechte des feinern Stichs ganz allein und selbständig erledigen; nämlich mittels der am Außenrande ihrer Rückseite angebrachten kleinen Maskunde. Nimmt dabei der Lehrer Bedacht, die betreffende Aufgabe möglichst lakonisch zu formuliren, so bildet dieselbe (auch für ganz elementare Klassen) ein nicht zu unterschätzendes Erziehungsmittel in der Kunst, die im Kerne der Frage oft ziemlich zahlreich eingehüllten Bedingungen rasch und richtig auseinander zu wirren und die zu ihrer Lösung nöthigen Größenverhältnisse (aus der eben zu Gebote stehenden mehr und minder kleinen Tabellenwelt) selbstthätig herbeizuschaffen; just, wie das Leben außerhalb der Schule es eben zu fordern pflegt.

Und insofern überhaupt die innigere Verknüpfung der Wissenschaft mit dem Leben, oder der Schule mit der Praxis, und zwar in einer möglichst beide zugleich zu bereichern und zu heben geeigneten Weise, zu einer der pädagogisch wichtigsten Aufgaben unsrer Zeit gehören möchte, dürfte es auch geboten erscheinen, das staats- und volkswirthschaftlich so wichtige Gebiet der Zins- und Renten- oder sogenannten höhern Finanzrechnung im Schul- wie Berufsleben in nur gedachtem Geiste mehr zu fördern und zu popularisiren und deshalb auch mehr zu vereinfachen; weshalb wir namentlich die am Schlusse des Kap. 3 abgehandelte „verdichtete Zins- und Rentenrechnung" nicht blos den Männern der Versicherungs-, und der forst- und landwirthschaftlichen Taxations- und verwandter Rechnungspraxis, sondern auch den mathematischen Pädagogen zu desfallsiger besonderer Beachtung empfehlen möchten, und zwar den Letzteren besonders noch insofern, als sich dabei wiederum mannigfache Gelegenheit bietet, die gewandte Mitbenutzung obgenannter Rechnungshülfen und damit zugleich die Erkenntniß von den Vortheilen solcher Gewandtheit und somit auch das Interesse für derlei fortschreitende mathematische Betriebsamkeit im Schul- und Wirthschaftsleben erfreulich zu kultiviren.

Kap. 1. Meßknechts-Hülfen zur allgemeinen Zifferrechnung.

A. Reciprokentafeln, zur Ersparung der Divisionsarbeit.

Allgemeine Reciprokentafel. (Rechte Oberecke des Knechts.) § 1.
Die eine Spalte zeigt die Reciprokenziffer der andern und umgekehrt. Bei der Ablesung beachte man, daß die linke von oben nach unten, die rechte von unten nach oben läuft. Die Einsetzung des Komma's geschieht nach der Regel: So viele Ganze-Stellen die Zahl (der Divisor), so viele Anfangsnullen die Reciproke (oder der Quotient in 1); und umgekehrt.

1. Beisp. Die Reciproke (oder der umgekehrte Werth) der Zahl 117,5 ist $= \frac{1}{117,5} = 0,00851$; welchen Werth man gleich aus Meßknechts R-Tafel ablesen konnte, wenn man in deren erster Links-Spalte 117_5 aufsucht, welcher Punkt rechts auf 851 (ganz scharf auf 851_1) zeigt, sodaß man mit Rücksicht auf obbemerkte Kommaregel gleich ausschreiben kann: 0,008511.

2. Beisp. $\frac{11}{8,756}$? Erste Lösung. Da dies $= \frac{1}{8,756} . 11$ od. = der 11fachen Recip. von 8,756, und letztre sich bei dem Punkte 875_6 der R-Tafel als 0,1142 erweist, folgt durch $\times 11$ der gesuchte Quotient = 1,2562. — Zweite Lösung. In der Regel noch etwas genauer erhält man solche Quotienten, wenn man gleich anfangs den gegebenen Bruch durch die Zahlen, also hier durch 11 dividirt, wobei sich derselbe verwandelt in $\frac{1}{0,799}$ und wozu die Tafel sofort ablesen läßt 1,2562 bis 1,2563.

Ein wenig Einübung in der Ablesung dieser Tafel gewährt also dem Rechner namhafte Erleichterung in allen den Fällen, wo der Zähler oder Dividend eine einziffrige oder auch mehrziffrig runde Zahl, wie z. B. 20 od. 120 ꝛc. ist; ganz besonders auch bei metrologischen Umrechnungen. Und wäre es nur, um derlei auf gewöhnlichem Rechnungswege gefundene Resultate ebenso flüchtig als sicher zu controliren.

3. Beisp. Wenn auf 1 Hectar ein Holzertrag von 1 Stère (Kubikmeter oder C^m) kommt,

so kommen auf 1 östr. Joch	preuß. Morg.	bair. Tagw.	sächs. Ack.	hannöv. Morg.
an landübl. Kbfßn: 18,222	8,259	13,705	24,368	10,517

Und wenn auf 1 Vorstehendes (Joch, Tagwerk ꝛc.) 1 landübl. Kubikfuß kommt, so ist das nach Kubikm. pro Hectar? (Durch einfache Ablesung der Reciproken) = C^m pro Hectar: 0,0549; 0,1211; 0,0730; 0,0410; 0,0951

Specielle (oder multiplicirte) Reciprokentafel für die § 2.
Zahl **12**; zur schnellen Verwandlung der Decimal- in Duodecimal-Zolle (oder sonstiger 10- und 12-getheilter Mase) und umgekehrt: Mittels Kreistafel linker und rechter D-Spalte. Jene zeigt das Decimal-, diese gegenüber das zugehörige Duodecimal-Mas, und umgekehrt.

1. Beisp. 8,4 Dec.″ geben an Duodec.″? Linkes D. 8,4 zeigt im D gegenüber auf **10,1**″.

2. Beisp. 84″ Dec. in Duodecimalmas? Indem man vorige Beide in 10-facher Größe abliest, folgt hier 101″ Duodec.

3. Beisp. 116½ Duodec.″ sind nach Decimalzollen? In rechter D-Spalte $11_{6\frac{1}{2}}$ zeigt gegenüber in linker auf 9,7; und somit für das 10mal so große 116½ auf **97**.

4. Beisp. 33,2 Dec.″ nach Duodec.″? Linkes D = 33,2 zeigt gegenüber aufs Duodec. D 39,8.

5. Beisp. 89,5 Duod.″ nach Dec.″? Da 89,5 über die Tafel fällt, nimmt man dessen Zehntel = 8,95, das in rechter D-Spalte aufgesucht und gegenüberstehendes 7,46 gleich 10-fach abgelesen, das Resultat 74,6 Zoll gibt.

Specielle (oder multiplicirte) Reciprokentafel für den § 3.
Divisor $12^2 = 144$; und zwar mit Ablesung jedwedes desfallsigen Quotienten ohne alle Rechnung; nach folgender Regel: Geh' mit dem Di-

videnden durch die Kr.- (oder Kreis-) Skala in die linke D- und damit durch die rechte D- in die Kreis-Skala zurück. — Wegen Einsetzung des Komma oder Vorsetzung etwaiger Nullen hat man einfach mit dem Divisor (144) am Dividenden flüchtig probirend von links nach rechts zu gehen.

1. Beisp. 8250 preuß. Kbkfß. in Schachtruthen (à 144 C.') zu verwandeln. — In der Kreis-Spalte 825_0 aufgesucht; deutet links auf D = 32,4; und rechtes D = 32,4 auf 573 der Kreis-Spalte; also Resultat = 57,3 Schachtruthen.

2. Beisp. $174^1/_2$ □" Duodecimalmas in □ Fußen auszudrücken. Da Kr. $174^1/_2$ links auf D 14,9 reichlich zeigt, und rechtes D 14,9 reichlich auf Kr. 121_5, folgt $174^1/_2$ □" = 1,215 □ Fuß.

3. Zusatz. Um auf diese Weise auch Divisionen mit $12^3 = 1728$ sich zu erleichtern oder aber zu controliren, hat man vorher mit 12 zu dividiren. Z. B. 5464 Duodec-Kubikzolle als Kubikfuß auszudrücken. Indem man durch Division mit 12 erhält 455,3 und mit diesem nun ganz wie vorhin verfährt, zeigt uns zum links gefundenen D 24,1 das rechte D in der Kreis-Skala 3,17 C'.

B. Quadratwurzel und Quadrat.

Mittels Z- und Qw-Spalte der rechten Wand. Jene zeigt den Radicanden (die zu radicirende Zahl) und diese die zugehörigen Wurzelziffern.

§ 4. Quadratwurzeln abzulesen. Theile den Radicanden von dem Komma oder den Einern ab in zweistellige Klassen, aufwärts (Oberklassen) wie abwärts (Unterklassen). Wenn die vorderste Klasse zweizifferig ist, so gehe mit dieser und der ihr als Bruchtheil (als Viertel oder Zehntel) angehängten Folgeklasse — dagegen wenn sie einzifferig ist, so gehe mit den beiden vordersten Klassen (also mit 3 Ziffern) und der als Bruch angehängten Folgeklasse — in die Z-Skala, und setze dann in die aus der linken od. Qw-Spalte abgelesenen zugehörigen Wurzelziffern das Komma nach folgendem Gesetze ein: a. Soviel Oberklassen der Radicand, soviel Ganzestellen die Wurzel; b. Null-Oberklasse dort, Null-Ganze hier, und für jede etwa dort noch unmittelbar folgende doppelnullige Unterklasse eine Nulldecimale hier.

Da die Tafel für zweizifferige Radicanden nicht so gut arbeitet, wie für dreiziffrige, so kann man zu genaueren Zwecken erstern Fall leicht auf letztren bringen, indem man mit 4 dividirt, beziehlich multiplicirt, und die darnach sich ergebende Wurzel entgegengesetzt mit 2 behandelt.

Wenn also z. B. die Quadratwurzel aus 473,2 oder $\sqrt{473{,}2}$ die Ziffern 217_5 gibt, so folgt wegen 4 | 73, | 20 (d. i. wegen zwei Oberklassen) der Wurzelwerth = 21,75. — Wogegen für $\sqrt{0{,}0004732}$, wegen 0, | 00 | 04 | 73 | 20 die Wurzel = 0,02175 sein muß, da wegen jeder vorgängigen doppelnulligen Unterklasse eine Null-Decimale vor die geltenden Wurzeldecimalen zu setzen.

§ 5. 1. Beisp. $\sqrt{2}? \ldots = \sqrt{2{,}00}$; und da zu Z 200 die Qw-Spalte 141_4 zeigt, folgt $\sqrt{2} = 1{,}414$.

2. Beisp. $\sqrt{\tfrac{1}{2}}? \ldots = \sqrt{0{,}50}$; und da Z = 50 auf Qw. = 70_7 deutet, folgt $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}707$.

Auch so: $\sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{1{,}414}$, was laut Reciprokentafel = 0,7071.

3. Beisp. Man soll die Größe eines sächs. Ackers nach sächs. Geometerschritten (5 = 1 Ruthe) in Form eines Quadrates abschreiten, wie groß dessen Seiten? Da laut metrologischem Kapitel der polytechnischen Brieftasche, Tabelle 3, fraglicher Acker = 300 □R, und $\sqrt{300}$ laut Qw-Spalte die Ziffern 173_2 hat, folgt die verlangte Seite = 17,32 Ruthen = 86,6 Feldmesserschritte.

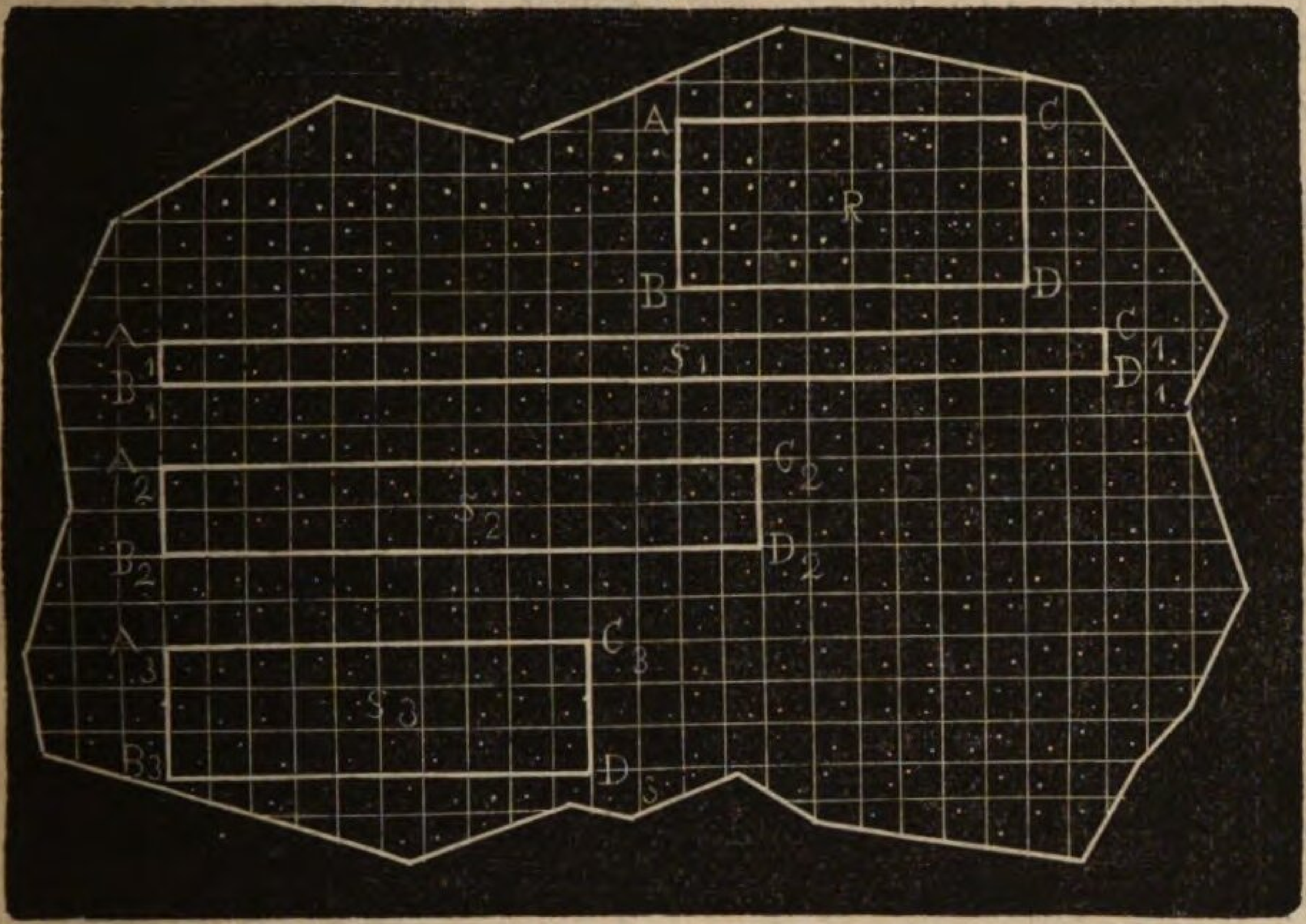
4. Beisp. $\sqrt{1{,}3575}$ und $\sqrt{0{,}0135_{75}}$? — Nach Regel a. abgetheilt ist in beiden Fällen die oberste Klasse 1 und die folgende 35, also in Z-Spalte aufzusuchen $135^{75}/_{100}$ oder $135^3/_4$; zeigend auf Qw. 116_5. Für den ersten Fall ist also die Qw. = 1,165; für den zweiten 0,1165.

5. Beisp. $\sqrt{1358}$? und $\sqrt{13,58}$? und $\sqrt{0,1358}$? In jedem dieser drei Fälle wird die oberste Klasse 13. Bei flüchtiger Rechnung sucht man also Z. $13^6/_{10}$ oder $13^1/_2$ reichlich, und liest dazu Qw. = 37. Insofern nun vorstehende 3 Radicanden beziehlich zwei, eine und null Oberklassen zeigen, folgen deren 3 Wurzeln: beziehlich 37; 3,7; 0,37.

6. Beisp. Vorigen Fall durch Behandlung mit 4 genauer aufzulösen. — Durch Division mit 4 verwandelt sich obiger Radicand 1358 in $339^1/_2$, dazu zeigt die Qw=Spalte $184^1/_4$ und damit (durch $\times$ 2) die gesuchte Wurzelziffer als $368^1/_2$, mit Rücksicht auf obige Komma's also zu 36,85; 3,685 und 0,3685.

7. Beisp. Eine Bestandsprobe ABCD von 6400 □ Fuß erwies 30 Stämme von d = 10″ mittlerer Grundstärke (in Brusthöhe). Man soll hiernach aus dem mittleren quadratischen Standraume dieses Orts Dichtheit durch die absolute Standseite s, wie durch die relative oder die Abstandszahl a (= Standſ. s dividirt durch Stammstärke d) möglichst flott ausdrücken. — Standraum = 6400 : 30 = $213^1/_3$, s = $\sqrt{213^1/_3}$ laut Knecht = 14,6 Fß. und daher a = $\frac{14,6 \,.\, 12''}{10''} = 17,5$.

15

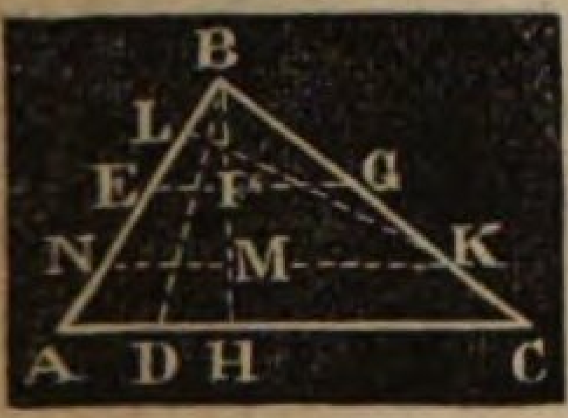


Für den wissenschaftlichen Forstmann ist sonach dieses Ortes Dichtheit versinnlicht und fixirt durch: „10 Zoll Stärke bei $14^1/_2$ Fuß Standseite“, oder besser durch: „$17^1/_2$=facher Abstand mit 10″ Mittelstärke.“

8. Beisp. Wie das Kapitel Mechanik der Brieftasche angibt, findet sich die (theoretische) Ausflußgeschwindigkeit v des Wassers aus einem Gefäß oder unter einem Spannschützen ꝛc. nach der Formel $v = \sqrt{2gh}$, worin h die Druckhöhe des Wassers über der Mitte der Oeffnung und g die Beschleunigung der Schwere (laut Brieftasche = 9,81 Meter = 31,25 preuß. Fuß ꝛc. ꝛc.). Wie groß nun ist dies v aus dem Reservoir einer Turbine bei 10^m Druckhöhe? Da 2g = 19,62 folgt $\sqrt{2gh} = \sqrt{196,2}$, wobei der Knecht bei Z = $196^1/_5$ schnell die Qw. = 14,7 oder schärfer abgelesen 14,69 Meter zeigt.

9. Beisp. Die Waldecke ABC soll durch 2 Parallelen EG und NK in drei gleiche Theile getheilt und die Grenzpunkte E und N auf der 40 Ruthen langen Seite AB durch Rechnung festgestellt werden. — Laut Dreieckslehre der Brieftasche ist BE = $40\sqrt{^1/_3}$ u. BN = $40\sqrt{^2/_3}$. Flüchtig wird man also rechnen $40\sqrt{0,33^1/_3}$ und $40\sqrt{0,66^2/_3}$ was laut Qw=Spalte $40 \times 0,58$ knapp, = 23,0 R. und $40 \times 0,81^1/_2$ reichlich, = 32,6 Ruthen gibt. — Genauer gehend würde man aber gerechnet haben durch „Radic. $\times$ 4“ … $\frac{40}{2}\sqrt{^4/_3} = 20\sqrt{1,33^1/_3}$ (laut Qw=Spalte) = $20 \times 1,155$ = 23,10 Ruth.; und $\frac{40}{2}\sqrt{^8/_3}$ oder $20\sqrt{2,66^2/_3}$ (laut Qw=Spalte) = 20 . 1,633 = 32,66 Ruth.

16



Zusatz. Wenn ein dreieckiges Flächenstück durch Parallelen zu einer Seite in 5 gleiche Streifen getheilt werden soll, so findet man die Endpunkte dieser Grenzlinien in den beiden andern Seiten, indem man letztere successive mit $\sqrt{^1/_5}$, $\sqrt{^2/_5}$, $\sqrt{^3/_5}$ ꝛc. d. i. mit $\sqrt{0,20}$; $\sqrt{0,40}$; $\sqrt{0,60}$ u. $\sqrt{0,80}$ also aus dem Knechte mit 0,447; 0,633; 0,775; 0,895 multiplicirt. Die genauere Behandlung (durch Division erst mit 4, und nachheriger Multiplikation mit 2) gibt bei nur wenig mehr Zeitaufwand die schärfern Resultate 0,4472; 0,6327; 0,7742; 0,8942.

§ 6. Quadrate oder zweite Potenzen abzulesen.

a. Geht man mit den (von links her) ersten drei resp. vier geltenden Ziffern einer zu quadrirenden Zahl (Wurzel) in die Qw=Spalte, so zeigt daneben die Z=Spalte die ersten drei bis vier Ziffern des Quadrats.

b. Um hierein das Komma richtig einzusetzen, unterscheide man, ob die gegebene Wurzel Ganze hat oder ein sogenannter echter Decimalbruch (mit 0 Ganze) ist. Im ersteren Falle stellt man leicht das Quadrat der höchsten (linksten) Stelle fest und schneidet dann für jede folgende Ganzestelle der Wurzel zwei Ganzestellen im Quadrate dazu.

Z. B. $17{,}3^2$? Da Qw. 173 auf Z 299_3 deutet, und hierin die 2 das Quadrat der 1 bedeutet, für die noch folgende eine Ganzestelle 7 also noch zwei dazu zu schneiden, so schreibt der mit dieser einfachen Praxis Vertraute sofort $17{,}3^2 = 299{,}3$.

c. Hatte aber die Wurzel Null=Ganze, so stellt man in die dazu abgelesenen Quadratziffern ebenso einfach das Quadrat der ersten geltenden Decimale fest und sorgt dafür, daß dies Quadrat doppelt so weit vom Komma nach rechts kommt, als es in der Wurzel steht.

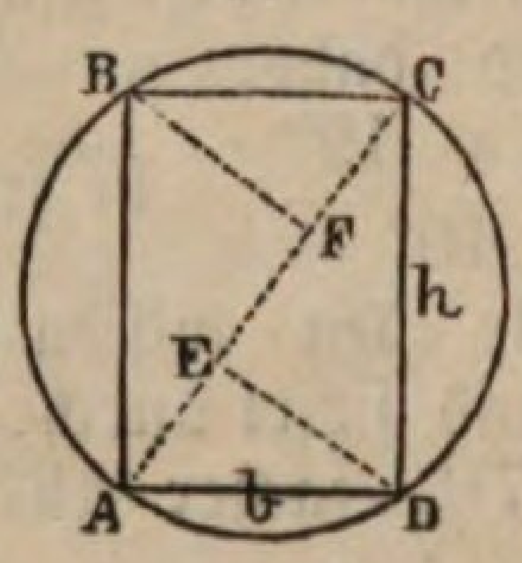
Um z. B. $0{,}173^2$ aus der Z=Spalte abzulesen, findet man, wie oben zu Qw. 173 rechts Z 299_3; deren 2, als Quadrat der ersten Decimale, also die ersten zwei Decimalen der Potenz zu bilden hat, so daß man gleich ausschreibt

$$0{,}173^2 = 0{,}02993.$$

Ebenso wäre für $0{,}0173^2$ aus Z zu lesen $0{,}0002993$.

§ 7.

17



1. Beisp. Schnell die Rundstärke oder den Durchmesser BD = d anzugeben, den man braucht, um scharfkantige Balken von der Höhe $h = 15^1/_2$ und Breite $b = 11^1/_4''$ daraus zu schneiden. — Bekanntlich ist $d = \sqrt{h^2 + b^2} = \sqrt{15{,}5^2 + 11{,}25^2}$, was mittels Qw. 155 und Qw. $112^1/_2$ sich schnell als $\sqrt{240{,}02 + 126{,}5} = \sqrt{366{,}52}$ und nun mittels Z $366^1/_2$ als Qw. $= 19{,}15''$ ergibt.

18



2. Beispiel.

Wenn D die abzüglich (oder über) dem Wurzelanlaufe gemessene Grundstärke und d eine Oberstärke bedeutet, so ist bei allen im Schlusse erwachsenen stumpfwipfeligen (gering höhenwüchsigen; haubaren) Stämmen die zwischen d und D liegende Stammform durchschnittlich nahe parabolisch und somit (laut Brieftaschen=Kapitel „Stereometrie") deren Mittenstärke nahe $= \sqrt{\frac{D^2 + d^2}{2}}$. Nach diesem Gesetze soll man flott die Mittenstärke von derlei Stämmen mit $22{,}5''$ Grund= und $11{,}5$ Oberstärke angeben. — Da der Knecht beide Quadrate mittels Qw. 115 und 225 sofort als 132 und 506 zeigt, folgt leicht nach $\sqrt{\frac{132 + 506}{2}} = \sqrt{319}$ aus oder bei Z 319 ... die fragliche Mittenstärke $= 17{,}86''$.

C. Kubikwurzel und Kubus.

Mittels der Z= und Cw=Skala der rechten Wand.

§ 8. Kubikwurzeln abzulesen.

Theile den Radicanden von dem Komma oder den Einern ab in dreistellige Klassen, aufwärts (Oberklassen) und abwärts (Unterklassen); gehe darauf mit der ersten und der als Bruchtheil (Viertel oder Zehntel) angehängten zweiten in die Z=Skala, und setze in die danach aus der Cw=Spalte

abgelesenen Wurzelziffern das Komma nach folgendem Gesetz: a) So viele Oberklassen der Radicand, so viele Ganzestellen die Wurzel; b) Null-Oberklasse dort, Null-Ganze hier, und für jede etwa dort unmittelbar folgende doppelnullige Unterklasse eine Null-Decimale hier.

Wenn die vorderste Klasse zwei- oder gar nur einstellig, und die Genauigkeit des darnach abgelesenen Resultates für den fraglichen Fall nicht genügen sollte: so multiplicire resp. dividire den Radicanden mit 8 und behandle die damit abgelesene Wurzel entgegengesetzt mit 2. [Die § 14 erwähnten Knechte feinern Stichs besitzen hierfür eine speciellere Spalte.]

1. Beisp. $\sqrt[3]{130{,}2}$? — Abgetheilt als 130,|200 zeigt Z $130^1/_5$ auf Cw. 509 § 9.
oder schärfer 509_2; also da nur eine Oberklasse vorhanden: $\sqrt[3]{130{,}2} = 5{,}092$.

2. Beisp. $\sqrt[3]{44{,}66}$? — Abgetheilt als 44,|660| zeigt dann Z $44^2/_3$ hinlänglich scharf auf 355; giebt also 3,55. Will man dies Resultat schärfer haben, so hat man durch Multiplication mit 8 den Radicanden 357,3 und zu diesem Z die Cw. 709_7 und somit durch Division mit 2 die genauere Wurzel 3,548.

3. Beisp. $\sqrt[3]{2}$? — Abgetheilt: 2,|000|; würde als Z 2 aufgesucht gerade in den groben Anfang der Tafel fallen; deshalb flott mit 8 dividirt und zu Z 250 die Cw. 630 gleich mit 2 multiplicirt abgelesen, was 1,26 ergibt. (Der genaue Werth ist bekanntlich 1,2599.)

4. Beisp. $\sqrt[3]{^1/_2}$? .. $= \sqrt[3]{0{,}5}$; abgetheilt als 0,|500, gibt zu Z 500 die Cw. 793_7, also wegen Null-Oberklasse $\sqrt[3]{^1/_2} = 0{,}7937$. —

Auch als $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{1{,}26}$; mittels Reciprokentafel $= 0{,}7937$ bis $0{,}7938$.

5. Beisp. Wer sich das russische Wedro (nach Kapitel „Maskunde" der Brieftasche = 750,57 russ. oder engl. Kubik-Zoll) seiner Größe nach als Würfel in engl. Zollen anschaulich machen will, wird zu dessen Seite nehmen?

$\sqrt[3]{750{,}57}$; laut Z $750_6 = 9{,}087$ bis $9{,}088$ oder kürzer 9,09 Zoll.

6. Beisp. Man soll eine würfelförmige Kiste angeben, die netto einen sächs. Scheffel (laut Brieftasche = 7900 sächs. Kubikzoll) faßt; Also deren Seiten im Lichten? $= \sqrt[3]{7900}$; abgetheilt 7|900; würde bei Z = 7,9 das Cw. = 20,0 offenbar zu grob abgerundet ergeben. Deshalb sucht man zum Achtel oder zu 987_5 die Cw.; und liest dazu ab 995_8, was gleich gedoppelt und abgetheilt (wegen 2 Oberklassen) 19,916 gibt; worin nur die letzte (also 5te) Ziffer noch unsicher ist.

7. Beisp. Das Volumen oder der Inhalt v einer Kugel vom Durchmesser d ist (laut Brieftasche) $= \frac{\pi}{6} d^3$; oder da π das Verhältniß des Kreisumfanges zum Durchmesser $= 3{,}1416$ bedeutet, auch $0{,}5236\, d^3 = v$; woraus $d^3 = \frac{v}{0{,}5236}$, oder mit Hülfe der Reciprokentafel auch $d^3 = 1{,}91\, v$, also $d = v \sqrt[3]{1{,}91}$; mittels welcher Formel und einer Kubikwurzeltafel zu jedwedem gegebenen Kugelinhalte schnell der entsprechende Durchmesser gefunden werden kann. Als z. B.: Welche Kugel kommt einem Kubikfuße gleich? Da v = 1 folgt $d = \sqrt[3]{1{,}91} = \sqrt[3]{1,|910}$. Durch 8 dividirt gibt $0{,}238^3/_4$; da nun Z $238^3/_4$ auf Cw. 620_2 oder 620_3 zeigt, folgt durch Doppelung 12405 und somit (wegen einer Oberklasse) 1,2405 Fß. als Durchmesser (der Durchmesser einer Kugel muß also 24% größer als die Seite des Würfels sein, wenn beide Körper gleichen Gehalt haben sollen).

Würfel oder dritte Potenzen abzulesen. § 10.

Geht man mit den ersten oder höchsten drei resp. vier Ziffern einer zu cubirenden Zahl in die Cw-Skala, so zeigt dazu links die Z-Skala die ersten drei bis vier Ziffern des fraglichen Cubus. — Behufs sothaniger Einsetzung

des Komma unterscheide man, ob die gegebene Wurzel Ganze hat oder nicht. Im erstern Falle stellt man in der abgelesenen Würfelziffer erst den Cubus der ersten Wurzelziffer fest und schneidet für jede nachfolgende Ganzestelle der Wurzel 3 Stellen dazu. Im andern Falle, d. i. wenn ein echter Decimalbruch (mit 0 Ganze) zu kubiren, hat man ähnlich in den abgelesenen Cw.-Ziffern den Würfel der ersten geltenden Decimale in's Auge zu fassen und so zu stellen, daß derselbe vom Komma 3mal so weit absteht,.als in der Wurzel. (Für Zahlen, die mit 1 und 2 anfangen, ist diese Weise nicht anwendbar. Wem dies störend, beachte die Parenthese des § 8.)

1. Beisp. $8,25^3$? oder $8,25 \times 8,25 \times 8,25$? — Da Cw. 825 auf Z 561_4 zeigt und 561 dem Cubus der 8 entspricht, folgt 561,4.

2. Beisp. $0,415^3$? ... Cw. 415 zeigt auf Z 71_4; davon 71, dem Cubus der 1. Decimale 4 entsprechend, 3 Decimalen occupiren muß, folgl. $0,415^3 = 0,0714$.

3. Beisp. $0,059^3$? — Da Cw. 590 auf Z 205_4 zeigt und 205 (als Cubus von 5) die sechste Decimale mit einnehmen muß, folgt $0,059^3 = 0,0002054$.

4. Beisp. Den Gehalt eines Würfels von $9\frac{1}{4}$ Fß. od. 9,25 Fß. schnell aus der Z-Spalte abzulesen: — Ein Blick auf Cw. 925 zeigt in Z den Inhalt 791,4 Kbfß.

5. Beisp. Wenn man weiß, daß der sächs. Fuß = 0,896 östr. Fuß, so gibt Meßknechts rechte Wand die entsprechende Größe des sächs. Kubikfußes schnell? Mit einem Blicke auf Cw. 896 als 0,7195 östr. Kbfß.

D. **Die Logarithmentafel** (auf Meßknechts Rückseite).

Für Eingänge und Ablesungen bis zur fünften Ziffer. (Betreffs der Genauigkeit und Controle, sowie einer etwa unleserlich gewordenen Stelle vgl. I. Abschn. § 15.)

§ 11. Die fetteren Ziffern oder mittleren Spalten zeigen die Zahl oder den Numerus und zwar zunächst dessen dritte, bezüglich zweite und dritte Ziffer, während die erste als Eingang am obern Kopfe steht. Bei den der Brieftasche beigegebenen Knechten bedeutet demgemäs und beispielsweise der Kopf **200** mit der dortigen darunter stehenden Einweisung **„und 1"** (wie wohl nicht mißzuverstehen) den Numerus 201, wozu Spalte links die Decimalen oder Mantisse des Logarithmus von 201 und zwar als 3032 zeigt, während gleichzeitig die rechte Seite die Mantisse des Log. **„300 und 1"** oder lg. 301 als 4786, oder genauer abgelesen, unverkennbar als 47857 bis 47858 erweist.

Die I. § 14 erwähnten Knechte fein. Stichs haben am Numeruskopfe anstatt 100, 200 ꝛc. nur 1, 2 ꝛc.

Die jedem Logarithmus zugehörige Kennziffer oder Karakteristik fügt man der abgelesenen Mantisse bekanntlich nach folgender Regel bei: So viele Ganzestellen der Numerus hat, so viele Einheiten weniger eins erhält der Logarithmus zur Kennziffer; und so viele Anfangsnullen (incl. der 0 Ganze) der Numerus, so viele Minuseinheiten sind dem außerdem mit 0 Ganze beginnenden Logarithmus anzuhängen. (Daß und warum die Mantisse ganz dieselbe bleibt, wo auch in der Zahl das Komma steht, wird wohl allen unsern Lesern noch erinnerlich sein.) S. die Beispiele sub a. § 12.

Umgekehrt also, wenn zu einem gegebenen Logarithmus der zugehörige Numerus zu suchen und dessen Größe vier- oder fünfzifferig aus den fetten Spalten unsrer Tafel abgelesen ist, hat man das Komma einzusetzen nach der Regel: So viele Einheiten des Logarithmen Kennziffer besaß, so viele Stellen plus eine schneidet man von links nach rechts als Ganze ab; oder aber: so viele Minuseinheiten dem Logarithmus anhingen, so viele Anfangsnullen (incl. der 0 Ganze) sind der gefundenen Zahl noch vorzusetzen.

Schließlich ist nochmals auf die siebenstelligen Logarithmen an den äußersten Rändern aufmerksam zu machen!

Ablesungsbeispiele. § 12.

a. Für Aufsuchung eines Logarithmus.

lg. 2? (d. h.: welches ist der Logarithmus der Zahl 2 oder 2,000?). Da die Kennziffer aller Zahlen mit einstelligen Ganzen = 1 weniger 1, also = Null sein muß, folgt aus der Spalte unter 2 . . . Log. 2 = 0,301; genauer 0,3010 reichlich; noch genauer 0,30103 bis 0,30104. — (Die Knechte neuesten Stichs [vgl. I. § 14] zeigen unten am Rande noch genauer Log. 2 = 0,3010300.)

lg. 2,011? . . . Zum Numerus 201, zeigt Log.-Spalte die Mantisse 30342; also lg. 2,011 = 0,30342.

lg. 2,0115? . . . Geht man zu vorigem 201 noch um's halbe Zehntel weiter, so findet man links den Log. = 3035 reichlich, wofür das geübtere Auge gleich 0,30352 liest.

Demnach zeigt uns der Knecht an dieser Einen Stelle beispielsweise: Log. 2,0115 = 0,30352; Log. 20,115 = 1,30352; Log. 2011,5 = 3,30352; Log. 0,20115 = 0,30352—1; Log. 0,0020115 = 0,30352—3.

b. Für Aufsuchung eines Numerus. [nm. 0,01347? bedeutet: suche den Numerus zum Log. 0,01347!]

nm. 0,01347? . . Die 3 ersten Stellen 013 der Mantisse liegen in der Abtheilung des Numerus 1, und zwar in der linksten Spalte, und zeigen beim Unterstrich 4_7 den Numerus 100 und 3 nebst 1_5 knapp, d. h. (ohne Komma) die Zahl 10315 und somit (wegen 0 Ganze im Log.) den Werth 1,01315.

nm. 0,01347—3? . . . Man liest dafür aus derselben Stelle denselben Numerus, setzt demselben aber wegen der 3 Minuseinheiten drei Nullen vor, was 0,0010315 gibt.

nm. 3,01347? . . . Wegen der Kennziffer 3 muß der Numerus bei denselben Ziffern den Werth 1031,5 haben.

nm. 1,99525? . . . Da die 3 ersten Ziffern 995 unter dem Numerus 9 stehen, und 2½ Strich tiefer auf 891 zeigt (mittels Augenglases aber auf 8891 reichlich), liest man 9891 (während der feinere Knecht – s. I. § 14 – unverkennbar auf 98914 zeigt); und folgt für den gesuchten Numerus der Werth 98,91 beziehlich 98,914.

Beispiele logarithmischen Rechnens. § 13.

1) Logarithmisches Multipliciren. [Regel: Addire die Logarithmen der Faktoren.]

34,35 × 9,374 × 0,0437?

lg. 34,35	= 1,5359	zu welcher Summe bei der Stelle 148 der Log.-Spalte der Knecht die Zahl 1407 und mithin als Resultat **14,07** gibt.
„ 9,374	= 0,9719	
„ 0,0437	= 0,6405 — 2	
Summa	= 1,1483	

2) Logarithmisches Dividiren. [Regel: Vom Log. des Dividenden ziehe den des Divisors ab.]

$$\frac{\mathbf{127}}{\mathbf{45645}}? \ldots$$

	+3 −3	
lg. 127	= 2,10380	Die Zufügung von + 3 u. — 3 zum Log. des Zählers geschieht bekanntlich, um zu vermeiden, daß die Mantisse negativ wird.
„ 45645	= 4,65940	
Rest	= 0,44440 — 3	

Aber nm. 0,44440 — 3 ist = **0,0027824.**

3) Logarithmisches Potenziren. [Regel: Den Log. der Wurzel multiplicire mit dem Erhebungsexponenten.]

$\mathbf{1{,}03^{20}}$? oder auf welchen 20jährigen Nachwerth müßte beim Zinsfuß 3 der Jetztwerth 1 eines Geld- oder Holzbestands ansteigen, wenn derselbe durchschnittlich mit wirklich jährlich 3% seiner laufenden Größe sich gemehrt haben sollte?

Da Log. 1,03 = 0,01284 und dessen 20faches = 0,2568 so folgt bei 256_8 der linken Logarithmenspalte als zugehöriger Numerus 1,8065. (Der Holzbestand müßte also mit seinen Zwischenerträgen in 20 Jahren um nahe 81% seiner betreffenden fraglichen Anfangsgröße wachsen.)

4) Logarithmisches Radiciren. [Regel: Den Log. des Radicanden dividire durch den Wurzelexponent.]

$\sqrt[10]{5/3}$? oder wie groß ist der durchschnittliche jährliche Mehrungs-

faktor und das entsprechende Zuwachsprocent, wenn innerhalb 10 Jahren eine Größe (z. B. die Holzpreise) von 3 auf 5 gestiegen ist?

Log. 5 (bei Log. 500) $= 0{,}6990$
„ 3 („ „ 300) $= 0{,}4771$
Rest $= 0{,}2219$
10) $0{,}02219$

Da der Numerus zu $0{,}02219$ sich als $1{,}0524$ erweist, so folgt: jährlicher Mehrungsfaktor $1{,}0p = 1{,}0524$; u. Zuwachsprocent $p = 5{,}24\%$ oder $5\frac{1}{4}\%$.

§ 14. Verwandlung der **gemeinen** Logarithmen in **natürliche** und umgekehrt.

Die gemeinen oder (nach ihrem ersten englischen Herausgeber) Brigg'schen Logarithmen sind bekanntlich Exponenten der Zahl 10, als der Grundzahl ihres Systems. Indem z. B. $10^{0,30103}$ oder $\sqrt[100000]{10^{30103}} = 2$ ist, so folgt Log. 2 = 0,30103. —

Nimmt man zur Grundzahl eines logarithmischen Systems den Werth

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.\,2} + \frac{1}{1.\,2.\,3} + \frac{1}{1.\,2.\,3.\,4} \text{ ꝛc.} = 2{,}71828,$$

und hat man von irgend einer Zahl a den Logarithmus dieses Systems, so findet man dann die Logarithmen aller andern Zahlen nach der einfachen Formel

$$\text{Log.}\,(a+1) = \text{Log.}\,a + 2\left[\frac{1}{2a+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(2a+1)^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2a+1)^5} \text{ ꝛc.}\right]$$

Dies Logarithmensystem wird das natürliche oder (nach seinem schottischen Erfinder) auch das Neper'sche genannt.

Da $e^0 = 1$, also (wie der Log. v. 1 in jedem System) der logarithmus naturalis od. lg. nat. 1 = 0, so folgt aus obiger Formel log. nat. 2 = 0,693147 ꝛc.; log. nat. 5 = 1,609438; log. nat. 10 = **2,302585** = natürlicher Log. der Grundzahl des Brigg'schen Systems. — Aus den bekannten natürlichen ließen und lassen sich aber die gemeinen, kurzweg mit Log. oder lg. geschriebenen, leicht ableiten und umgekehrt, nach dem Gesetze:

$$(1)\ \text{Gem. Log. } a = \text{log. nat. } a \times \frac{1}{\text{log. nat. } 10} = \text{log. nat. } a \times 0{,}434294,$$

welcher letztre Faktor der Modul (m) des Brigg'schen Systemes heißt; und wonach nun auch

$$(2)\ \text{log. nat. } a = \text{Log. } a \times \text{Reciproke des Moduls} = \text{Log. } a \times 2{,}302585.$$

Die natürlichen Logarithmen haben nur für gewisse Zwecke der höheren Geometrie und Mechanik eine (vereinfachende) Bedeutung; ihre Ableitung aus den gemeinen des Knechts und umgekehrt geschieht auf Grund vorstehender beiden Formeln sehr leicht mittels der am Rande unsrer Logarithmentafel gegebenen Werthe von m, $^1/_m$, lg. m und lg. $^1/_m$. Z. B. Welches ist der natürliche Logarithmus der Zahl π (Verhältnißzahl der Kreisperipherie zum Durchmesser)? Da der gemeine Log. π (laut rechtem Rande der Logarithmentafel) $= 0{,}49715$, so folgt log. nat. π = Log. $\pi \times {}^1/_m = 0{,}49715 \times 2{,}30258$, und bei logarithmischer Ausführung dieser Multiplication:

Log. $0{,}49715$ $= 0{,}69649 - 1$
„ $2{,}302$ ꝛc. (laut Rand des Knechts) $= 0{,}36222$
$0{,}05871$

und nm. $0{,}05871$ laut Abtheilung 1 der Tafel $=$ **1,1447** $=$ log. nat. π

Kap. 2. Maskunde und Masrechnung.

§ 15. Kraft ihrer auf Raumersparniß äußerst bedachten Anordnung enthält unsere Brieftasche auf 6 Blättern eine Menge von Masangaben und Masreductionstabellen, welche bei gewöhnlicher Typographie wohl das 5fache Volumen zu beanspruchen pflegen. Wer in der Lage ist, diese metrologischen Hülfen oft und auch außerhalb seiner Arbeitsstube gebrauchen zu müssen und somit immer flott zur Hand zu wünschen, während er der übrigen Kapitel jenes polytechnischen Vademecums, vielleicht weil er eben kein Polytechniker, seltener in solcher Weise benöthigt ist, wie das z. B. beim Forst- und Landwirthe der Fall: der dürfte zweckmäßig handeln, wenn er die betreffenden sechs metrologischen und dazu die ihnen nachfolgenden, den Zins-, Renten- und Mortalitäts-Tabellen und dito Formeln gewidmeten drei bis vier Blätter aus dem Textbuche genannter Brieftasche herausnähme und solcher Gestalt allein und als ganz dünnes Supplementchen in und mit dieser Brieftasche, oder sonst wie, in Verbindung mit dem Meßknechte bei sich führte.

Die **beiden Masstäbe** des letztern (vgl. I. § 13 u. § 14) vervollständige man zugleich dabei noch durch einen **dritten**, indem man (wie schon sub I. § 14 gerathen) am obern Querrande der Vorderseite, von der Mitte aus nach beiden Seiten hin, mittels

eines sehr harten Bleistiftes seine landüblichen Zolle eingräbt und einsticht; am besten mit zehntheiliger Unterabtheilung und nebenbei Angabe auch der Viertel.

Daß man Meßknechts Milli- und Centimeter-Masstäbe, dafern man dieselben zur Bildung einer absoluten Masgröße, z. B. eines englischen Fußes, benutzen will, vorher erst geprüft und beziehendlich justirt haben müsse, ward ebenfalls bereits in sub I. § 13 angegeben.

Welche Fülle von Material zu heilsamen Uebungen für die Schule und bequemer Anwendung für die Praxis jene wenigen Blätter aber umschließen, wolle man an der Mannigfaltigkeit folgender weniger Beispiele, die zugleich dem Praktiker als Führer dienen sollen, erkennen. Bei derartigen Rechnungen vergesse man die oft sehr großen Erleichterungen nicht, welche Meßknechts Reciproken-, Potenzen-, Wurzel- und Logarithmentafeln Demjenigen gewährt, der sich in deren Gebrauch ein wenig eingeübt.

A. Beispiele über einfache Masrechnungen.

Längenmas (Math. Brieftasche Tab. 1). § 16.

1. Wie stellt sich die sächs. Elle gegen den preuß. Fuß, die berliner Elle und das Meter? — Die Brieftasche antwortet: Sächs. Elle (1b.) = 2 sächs. Fuß.; berliner Elle (1c.) = 25,5 preuß. Zoll; wozu nach 1d. folgt: 1′ sächs. = 0,902′ preuß. = 0,28319 Meter; also 1 Elle sächs. = 1,804′ preuß. = 0,56638 Meter. Und 1 preuß. Zoll (laut 1d.) = 1,108″ sächs.; 25,5″ preuß. also = 28,254 sächs.; berliner Elle also 4¼″ sächs. größer als die dresdner; oder größer im Verhältniß von 24 : 28,254 = 1 : 1,177 oder um nahe 18%.

2. Wie stellen sich die östreichischen Zolle, Fuße und Klaftern zu den preußischen Zollen, Fußen und Ruthen? — Da aus 1c. zu sehen, daß beide Staaten das Duodezzollsystem und dort die Klaftern 6 Fß., hier die Ruthen 12 Fß. haben, so folgt leicht aus 1d.: 1 Fß. oder Zoll östr. = 1,007 dgl. preuß.; 1 Klafter (oder 6 Fß.) östr. = 6,042 Fß. preuß. oder = 6,042 : 12 = 0,5035 Ruthen preuß. — Sowie 1 Fß. v. Z. preuß. = 0,993 dgl. östr.; 1 Ruthe (v. 12 Fß.) preuß. also = 11,916 Fß. östr., oder = 11,916 : 6 = 1,986 Klftr.

Quadrat- und Kubikmas (Tab. 2). § 17.

1. 100 östr. Quadratfuße ins preußische und Metersystem zu übersetzen und umgekehrt: Laut 2a. sind 100 □′ österr. = 101,4 □′ preuß. u. = 9,99 □-Meter.
desgl. 100 □′ preuß. = 98,6 □′ österr. „ = 9,85 □-Meter.
desgl. 100 □-Meter = 1001 □′ österr. „ = 1015 □′ preuß.

2. Wenn man beim Forstwesen und Holzhandel künftig das reine Metersystem als Basis und somit das Cubicmeter oder Stèr als Massen-Einheit annähme, wie würde sich dann in Sachsen diese neue Einheit gegen den Kubikfuß und die Normalklafter à 100 Kbfß. stellen?
Laut 2b. ist 1 Cm. = 44,03 C′ sächs., also auch = 0,4403 Nklftr.;
desgl. 1 C′ sächs. = 0,0227 Cm.; 1 Nklftr. also = 2,77 Cm. od. Ster.

Feld- und Wald-Flächenmas (Tab. 3). § 18.

1. Man will sich über das bair. Tagwerk an sich und im Vergleich zum preuß. u. metrischen Feld-Flächen- u. zum geographischen Meilenmas orientiren. — Laut 3a. und 3b. hat dasselbe 400 □-Ruthen oder 40000 □-Fß. bair.; und ist = 1,334 Morg. preuß. (also ⅓ größer als der preuß. Morg.) und = 0,3407 Hectar; während 16195 dgl. Tagwerke 1 geogr. □-Meile bilden. (Alles fast mit einem Blicke, weil auf dem Raume weniger □-Zolle zu ersehen.)

2. In Baden, Hohenzollern und Schweiz: wie verhält es sich daselbst mit dem Feld-Flächenmas nach Größe und Eintheilung? — Vermöge ihres obern und untern Kopfes antwortet dieselbe Tab. 3a. und 3b.: 1 bad. = 1 hohenzoll. Morgen = 1 schweiz. Juchart = 400 □-Ruthen = 40000 □-Fß., und gehen 91524 auf die geogr. □-Meile; und sind jeder = 0,36 Hectar ꝛc. ꝛc.

Körper-, Hohl- und Schichtmas (Tab. 4, 5 und 6). § 19.

1. Man will oder soll sich über die Unterschiede zwischen den Bier- und Wein- und den Scheitholzmasen Oesterreichs, Baierns und Sachsens orientiren! — Zu diesem Zwecke lesen wir aus 4c.: In Oesterreich gilt: 1 Eimer Wein = 41 Mas à 0,0448 Kbfß. od. 1,415 franz. Liter; 1 Eimer Bier = 42½ Mas.

In Baiern: 1 Wein-Eimer = 60 Mas à 1,069 Liter; 1 Bier-Eimer = 64 Mas. In Sachsen: 1 Eimer (Wein oder Bier) = 72 Kannen à 71,186 Kubikzoll oder 0,9356 Liter; oder sehr nahe $24^3/_{11}$ Kann. = 1 Kbfß.; und 1 Faß Bier = 4 Tonnen à 105 Kannen, 2c. 2c. Und was die Holzklaftern anlangt, so pflegen diese (wie auf derselben Tabelle zu lesen) in Oesterreich u. Sachsen zu 6 × 6 × 3 = 108 Kbfß. und in Baiern zu 6 × 6 × $3^1/_2$ = 126 Kbfß. Raum, oder dort mit 3 Fß., hier mit $3^1/_2$ Fß. Scheitlänge aufgestellt zu werden.

2. Wie stellt sich der österreichische und preußische Eimer gegen den seitherigen sächsischen? — Da laut $4^{c.}$ 1 österr. Eimer = 41 Mas, 1 preuß. = 60 Quart, 1 sächs. = 72 Kannen, so folgt aus $5^{a.}$: 1 österr. Eimer = 41 österr. Mas = 1,488 × 41 = 61,01 sächs. Kann.; 1 preuß. Eimer = 60 Quart = 1,224 × 60 = 73,44 sächs. Kannen.

3. Was hat Würtemberg für ein Getreidemas und wie stellt sich solches gegen das preußische und österreichische? — Aus Tab. $4^{c.}$ ist zu lesen: 1 würt. Scheffel (= 7537 C″ würt. = 177,23 Liter) = 8 Simri à 4 Vierling à 4 Mäslein à 4 Ecklein; und weiter aus $6^{a.}$: 1 würt. Scheffel = 7,537 würt. C′ = 3,225 preuß. Scheffel und auch = 1,772 Hectoliter; und umgekehrt 1 Hectoliter = 0,564 Scheffel würt. 2c. 2c.

4. In 100 Kubikfuß preuß., wieviel sind darin preuß. Quart, Eimer und Scheffel enthalten? — Nach Tab. $4^{c.}$ ist das preuß. Quart = $^1/_{27}$ C′ und 1 Eimer = 60 Quart = $^{20}/_9$ C′; 1 Scheffel (nahe) $^{16}/_9$ C′, folglich sind 1 C′ = 27 Qt. = $^9/_{20}$ Eimer = $^9/_{16}$ Scheffel; also 100 C′ = 2700 Qt., oder ($^{900}/_{20}$) = 45 Eimer, oder ($^{900}/_{16}$) = $56^1/_4$ Scheffel.

§ 20. **Gewicht** (Tab. 7).

1. Ueber das österr. (wiener) Gewicht und dessen Verhältniß zum neuen preuß. oder deutschen sich zu orientiren? — Aus $7^{b.}$ und $7^{c.}$ ersieht man, daß ein deutsches Pfund = 1 metrisch. Pfd. = 1 neues preuß. Pfd. = $^1/_2$ Kilogramm = 500^g (500 franz. Gramm); und aus $7^{d.}$, daß das wiener Pfund = $560,12^g$, und 1 Centner daselbst = 100 Pfund à 32 Loth à 4 Quent; sowie aus $7^{h.}$, daß 100 wiener Pfund = 112 neuen und auch = 119,73 alten preuß. Pfunden.

§ 21. **Geld** (Tab. 8).

1. Ueber die Münzgrößen der Türkei Auskunft zu geben! — Hierüber sagt Taf. $8^{b.}$, daß das Piaster (je nach Cours) = $^1/_{15}$ bis $^1/_{17}$ Thaler, also ca. 2 Groschen; „1 Beutel Silber" = 500 Piaster oder ca. 31 Thlr.; und dazu $8^{c.}$: daß „1 Beutel Gold" = 60 Beutel Silber oder ca. 1800 Thaler. —

B. Doppelmaße oder combinirte Masreductionen.

§ 22. **Feldflächen-Kubikfuße oder Forstmassenertrag** (Tab. 9).

1. Mit welchen Zahlen übersetzt man eine östreich. Forstmassenertragstafel, oder aber 100 C′ österr. pro Joch, in's preußische, bairische 2c. 2c.? — Laut erster Zeile von $9^{a.}$ sind 100 C′ in Oesterreich pro Joch = 453 preuß. C′ pro Morgen = 752 bair. C′ pro Tagwerk.

2. Mit welchen Faktoren hat man die Cotta'sche oder eine andere sächsische Forstertragstafel in's östreichische u. badische (= schweizerische) zu übersetzen? — Laut $9^{a.}$ durch Multiplikation beziehendlich mit 0,748 (oder fast $^3/_4$) und 0,547 (oder fast $^{11}/_{20}$).

§ 23. **Feldflächen-Hohlmas** (Tab. 10).

1. Der preußische Landwirth, wie übersetzt derselbe seine Erträge nach Scheffeln pro Morgen ins französische und östreichische und umgekehrt? Indem er aus Tab. $10^{a.}$ liest, daß 1 Scheffel pro Morgen = 2,1526 Hectoliter pro Hectar und = 2,0145 wiener Metzen pro Joch, hat er damit sofort die Faktoren zur Uebersetzung aus dem preußischen. Und indem er aus der zweiten Zeile oder $10^{b.}$ liest: 1 Hectoliter pro Hector = 0,4645 preuß. Scheffel pro Morgen und 1 wiener Metzen pro Joch = 0,4964 preuß. Scheffel pro Morgen hat er sofort damit auch die Faktoren zum Uebersetzen in das preußische.

2. Mit welchem Faktor übersetzt man französische Landwirthschaftserträge (nach Hectolitern pro Hectar) ins russische? Laut $10^{a.}$ sind 2,1526 Hectol. pro Hectar soviel als 1,1204 Tschertwert pro Deßätine; also der französische Ertrag 1 = der russ. Ertragszahl 1,1204 : 2,1526 (was etwa logarithm. nach § 28 gerechnet) = 0,521.

Feldflächen-Gewicht (Tab. 11). § 24.

1. Je 1 altes Pfund (z. B. Düngung) pro preuß. Morgen verlangt in Sachsen? — Laut oberer Zeile 2,17 Pfund.

2. In Folge eines Prämienausschreibens der königl. sächs. Staatsregierung über das mögliche Maximum an Runkelrübenproduktion (1829) hatte Herr Wirthschaftsdirector Stecher nach amtlicher Feststellung pro sächs. Acker erbaut 1158 Ctr. Rüben und 210 Ctr. Blätter. Ins preußische übersetzt heißt das? — Laut 7e. u. **11b.** an Rübenmasse $1368 \times 0{,}261 = 631$ Ctr. pro Morgen; und an Blattmasse $210 \times 0{,}461 = 92$ Ctr. pro Morgen.

Hohlmas-Gewicht (Tab. 12). § 25.

1. Wie verwandelt man die östreichische Gewichtszahl des Metzen in die französische des Hectoliter? Es antwortet hierauf Tab. 12a.: 9345 östr. Pfund pro Metze sind so viel als 8510 Kilogr. pro Hectoliter, also **1** österr. Pfund pro $\text{Metze} = 8510 : 9345 = \mathbf{0{,}911}$ Kilogr. pro Hectol.

2. Umgekehrt, das französische Hohlmasgewicht ins östreichische zu übersetzen: Zum vorigen 0,911 die Reciproke vom Meßknechte abgelesen, gibt: 1 Kilo. pro Hectoliter ist $= 1{,}098$ östr. Pfund pro Metzen.

Kubikfußgewicht (Tab. 13). § 26.

1. Wie übersetzt der preußische Techniker das englische Kubikfußgewicht a. ins alte und b. ins neue preußische? — Tab. 13a. antwortet: Für je 1 engl. Pfund, das der engl. C.' wiegt, setze der Preuße 1,0589 alte Pfund für seinen C.' Und wenn er dasselbe Gewicht in neuen Pfunden wissen will, ersieht er aus Tab. **7h.** daß 1,0589 alte $\text{Pfunde} = 1{,}0589 \times 0{,}9354$ oder $= 0{,}9905$ neue Pfunde. Er braucht also für gewöhnliche Genauigkeit die englische Zahl nur um 1% zu verringern.

Längengewicht (Tab. 14). § 27.

Die Vergleichungstabelle des Laufendfußgewicht gilt natürlich zugleich auch für Zolle, Ruthen 2c. zwischen jenen Staaten, wo diese letztern Mase gegen den Fuß einerlei Verhältniß haben. Z. B. Röhren, die im englischen 7 Pfund pro Fuß wiegen, würden im französischen und östreichischen haben? — Tab. 14 gibt zur Antwort: $1{,}488 . 7 = 10{,}4$ Kilogr. pro Meter; und $0{,}84 : 7 = 5{,}88$ wiener Pfund pro östr. Fuß.

Flächengewicht (Tab. 15). § 28.

Direkt zwar nur für □ Centimeter und □ Zolle; indirekt aber auch für Quadratfuße 2c., namentlich wenn dieselben zu jenen das gleiche (decimale oder duodecimale) Verhältniß haben.

1. Ein Druck von 10 Kilogr. pro □ Centimeter ins englische übersetzt, gibt? Laut erster Zeile von Tab. 15 . . . 10k. pro □cm. = 142,2 engl. Pfund pro engl. □ Zoll.

2. Aus welchem Faktor übersetzt man das englische Quadratfußgewicht (z. B. von Metallplatten) ins österreichische? — Da in England wie in Oesterreich 144 □" einen □' ausmachten, gilt natürlich das Verhältniß des Quadratzollgewichts auch für das des Quadratfußgewichts. Laut Tab. 15 setzt also für je 1 Pfund englisch pro □' der Oestreicher 0,871 wiener Pfund pro □' östr.

Mechanische Arbeit. Meterkilogramme und Fußpfunde (Tab. 16). § 29.

Z. B. Die Maschinen-Pferdekraft oder richtiger die secundliche Leistung einer solchen Pferdekraft, welche laut Tab. 16 = 75 Meterkilogramm (d. h. 75 Kilogr. auf 1 Meter oder 1k. auf 75m. oder 10k. auf 7,5 Höhe gehoben), ins Sächsische nach neuen Pfunden zu übersetzen! — Tab. 16 antwortet: $75 \times 7{,}06 = 530$ Fußpfund.

C. Specifisches und absolutes Gewicht der Stoffe.

Schätzung und Berechnung der Dichtheit, Raumgröße (Volumen) und Schwere verschiedener Materialien. (Volumenbestimmung aus dem Gewichte; Gewichtsbestimmungen aus dem Volumen.)

Das Kubikfuß-Wassergewicht (Tab. 17). § 30.

Zugleich auch zur Vergleichung und Uebersetzung der Kubikfußgewichte überhaupt aus dem einen Massystem in ein anderes.

1. Das sächsische Wassergewicht nach altem und neuem Mase und nach dem Medium und Maximum? — Aus Tab. 17 ist zu lesen: Bei mittl. Temp. oder 19° C' wiegt 1 C' Wasser sächsisch: 48,89 alte oder 45,35 neue Pfunde; und bei 4° C' nahe 1% mehr, oder genauer 45,35 × 1,008 = 45,71 neue Pfunde.

2. Für je 1 Pfund pro Kubikfuß, das der Engländer angibt, hätte der Preuße anzunehmen? — Laut Tab. 17 sind 62,33 engl. = (66 alte oder) 61,74 neue Pfund in Preußen; also 1 in England = 61,74 : 62,33 = 0,9905 in Preußen.

3. Was wiegt in Preußen das Quart und der Eimer Wasser? — Da laut 5a. 1 Quart = $1/_{27}$ Kubikfuß und 1 Eimer = 60 Quart oder auch $^{20}/_9$ C', so folgt schnell aus Tab. 17 ...1 Quart = 61,738 . 27 = 2,287 Pfd.; 1 Eim. = 61,738 . $\frac{20}{9}$ = 137,19 Pfund.

§ 31. **Specifisch- und Kubikfußgewicht der Stoffe ohne und mit Zwischenraum** (Tab. 18).

Bei den festen und tropfbaren Körpern versteht man bekanntlich unter dem specifischen Gewicht diejenige Zahl, welche anzeigt, wieviel mal so dicht oder schwer als Wasser irgend ein Stoff sei; dabei das Wasser und der andere Körper gewöhnlich in mittlerer Temperatur (19—20° Cels.) genommen. Bei den Gasen dagegen dient in der Regel die atmosphärische Luft von der dem Stoffe entsprechenden Temperatur als Vergleichseinheit. — Die Zusammenstellung von derlei Gewichten in Tab. 18a., 18b. und 18c. u. 18d. liefert auf $^3/_4$ Seiten soviel als andere technische Taschenbücher auf 4 Seiten. — Um daraus für feste und tropfbare Körper das absolute Gewicht pro Kubikmeter in Kilogr. oder pro Kubikfuß in Pfunden abzuleiten, hat man einfach deren Spezifischgewicht mit der Zahl der Tab. 17, also pro Kubikmeter mit 1000 zu multipliciren (d. h. das Komma um 3 Stellen rechts zu rücken); bei Gasen aber dann laut 18d. noch mit 770 zu dividiren oder mit 0,00123 zu multipliciren.

§ 32. 1. Man soll sich über das Gewicht des Sandes orientiren! Unter dem Buchstaben S lesen wir aus 18a.: Sand grob und trocken = 1,37, also (natürlich hier auch incl. Zwischenräume) 37% schwerer als Wasser; fein und trocken 1,64; grob und feucht 1,90; fein und feucht 1,95. — Also wiegt das Kubikmeter grober trockner Sand? Laut § 31 = 1370 Kilogr.

2. Der östreichische Kubikfuß Gußeisen wiegt mindestens? — Unter E in 18b. steht: Eisen gegossen 7,0 bis 7,5; und da laut Tab. 17 . . . 1 österr. C' Wasser = 56,32 Pfund, folgt 56,32 × 7 = 394 Pfund mindestens.

3. Die sächs. Kubikelle Sandstein wiegt im Mittel? — Spez. Gewicht laut 18a. = 1,9 bis 2,7 (das Minimum natürlich für den lockern und trocknen, das Maximum für den dichten und feuchten); im Mittel also 2,3; folglich 8 Kubikfuß nach Tab. 17 = 8 × 45,35 Pfund × 2,3 = 834 Pfund.

4. Die sächs. Normalklafter (100 C') frisches Buchenholz wiegt? — Da laut 18a. dessen spec. Gew. = 0,95 zu nehmen, und laut Tab. 17 100 C' Wasser = 4535 Pfund, folgt 4535 . 0,95 = 43 Centner.

5. 1 Kubikmeter atmosphär. Luft, bei 10° R. und mittlerem Barometerstand wiegt? . . . 18d. antwortet: 0,0012323 des Wassergewichts; und da dies = 1000 Kilogramm, folgt: 1,23 Kilogramm. — Und bei **0 Grad**? Laut 18d. nahe $\frac{1}{770}$ des Wassers, also 1000 : 770 = 1,3k.

6. Um wieviel Procent ist die Kohlensäure schwerer als die athmosph. Luft? — Da laut 18d. das spec. Gew. der Kohlensäure = 1,52; so folgt als Antwort: schwerer um 52%.

§ 33. **Gewichtsbestimmung aus dem Volumen und umgekehrt** (Tab. 19).

Wie man durch Multiplikation der Tab. 17 mit Tab. 18 schnell das Gewicht einer in kubischer Größe gegebenen Masse findet, besagen die drei Regeln von 19a. und die vorigen Beispiele.

Bezeichnet v das Volumen eines festen oder tropfbaren Körpers nach Kubikfußen, s sein specif. Gewicht (Tab. 18a. bis 18c.), w das Wassergewicht (Tab. 17) und a das absolute oder wirkliche Gewicht jener Masse, so muß immer sein:

$$1)\ a = s\,v\,w, \text{ also } 2)\ v = \frac{a}{s\,w} \text{ und } 3)\ s = \frac{a}{v\,w}$$

Die Formel 1) lehrt, wie man das Gewicht bei gegebenem Volumen, 2) wie man das Volumen bei gegebenem Gewicht findet. Um dieselben auch auf gasförmige Körper auszudehnen, muß man statt des Wassergewichts w das Luftgewicht *l* (der kubischen Einheit) einsetzen, das nahe = $w/_{770}$.

1) Ein ganz lufttrockner Eichenklotz von $v = 20$ Kubikfuß wiegt in Oesterreich? Da (laut 17) $w = 56{,}32$ und (laut 18a.) $s = 0{,}60$, so folgt

$$a = svw = 0{,}60 \times 20 \times 56{,}32 = 676 \text{ österr. Pfund.}$$

2) Wenn eine Partie harte Holzkohle in Würtemberg 100 Pfund wog, wie viel Kubikfuß waren es wohl etwa? Da $a = 100$, laut 18i. $s = 0{,}47$, laut 17 . . $w = 50{,}2$ folgt

$$v = \frac{a}{sw} = \frac{100}{0{,}47 \,.\, 50{,}2} = \frac{100}{23{,}49} = 4{,}24\ C'$$

Mit Zuziehung der Tabellen 5b. und 6b. (deren reciproke Zahlenwerthe die kubische Größe der Hohlmase angeben) kann man obige Gewichts- und Raumberechnung auch gleich auf die Hohlmase ausdehnen. § 34.

3) Was wiegt wohl ein bair. Eimer Lagerbier a) nach bair. und b) nach Zollgewicht? Wie Tab. 4 und 5 uns belehren, ist 1 bair. Eimer = 64 Mas à $0{,}043\ C' = 2{,}752\ C'$, also $v = 2{,}75_2\ C'$; s (laut 18c.) $= 1{,}034$; w (laut 17) $= 44{,}33$, folglich $a = 1{,}034 \times 2{,}75 \times 44{,}33 = \mathbf{126}$ bair. Pfund. Und nach Zollpfunden laut Tab. $7 = 126 \times 1{,}12 = 141$ metr. oder neue oder Zollpfund.

4) Das Mittelgewicht einer sächs. Tonne Steinkohlen? — Specifisches Gewicht incl. Zwischenraum laut 18c. $= 0{,}95$; also laut Tab. 17 das Gewicht von $1\ C' = 45{,}35 \times 0{,}95 = 43{,}1$ Pfund. Ferner 1 Tonne laut Tab. 4 = 2 Scheffel $= \frac{64}{7}\ C'$; also 1 Tonne Kohlen wiegt $^{64}/_7 \times 43{,}1$ Pfund = 394 Pfund oder ca. 4 Centner.

5) Wie verwandelt der preuß. Landwirth Getreidemengen, die in preuß. Scheffeln ausgedrückt sind, in Getreide-Gewicht, und zwar beispielsweise zunächst für sehr guten Waizen?.... Aus Tab. 6b., 17 und 18b. lesen wir:

1 Scheffel $= {}^{16}/_9$ Kubikfuß; 1 Kubikfuß Wasser $= 61{,}7$ (neu) Pfund; das specif. Gewicht des Winter-Waizen $0{,}70$ bis $0{,}81$, sodaß wir für den guten $0{,}80$ nehmen können; also 1 Kubikfuß solcher Waizen wiegt $61{,}71 \times 0{,}80 = 49{,}37$ Pfd. und somit 1 Scheffel $= 49{,}37 \times {}^{16}/_9 = 87{,}8$ oder 88 n. Pfd. Um also für sehr guten Waizen das Scheffelmas in Pfunde zu verwandeln, multiplicirt er jenes mit 88. Und umgekehrt, um desfallsiges Gewicht in Mas zu übersetzen, dividirt er mit 88, oder multiplicirt mit dessen Reciproke, die laut Meßknechts-Reciprokentafel $= 0{,}01136$.

6) Ein östreichischer Landwirth, der seinen Heuvorrath vermessen, findet noch ca. 1200 Kubikfuß vor. Wenn nun die Dichtheit der Schichtung (Bansung) eine mittlere ist, wieviel Centner sinds etwa?

Aus Tab. 17 und 18b. folgt: für Oesterreich 1 C' Wasser $= 56{,}32$ Pfund; specif. Gewicht des Heu's (vom lockersten bis dichtesten $= 0{,}07$ bis $0{,}12$) im Mittel $0{,}09$; also $1\ C' = 56{,}32 \times 0{,}09 = 5{,}07$ Pfund. Folglich Vorrath $= 5{,}07 \times 1200 = 6084$ Pfund; oder (da laut Tab. 7d. in Oesterreich 1 Ctr. = 100 Pfund) = beinahe 61 Centner.

Oder gleich nach obiger Formel (§ 33) $a = v.\,w.\,s. = 1200 \times 56{,}32 \times 0{,}09 = 6084$ Pfund.

Gewicht häufig vorkommender Metallwaaren in prismatischer, cylindrischer und Blechform (Tab. 19b. und 19c.). § 35.

1. Das Gewicht G einer $L = 20'$ langen Eisenschiene von $F = 5$ □ Zoll Querschnitt in preuß. Masen? Laut 19b. ist für $F = 1$ und $L = 1$ . . $G = 3132$ Pfund, also für $F = 5$, $L = 20$, also $FL = 100$ . . $G = 3{,}3132 \times 100 = 331$ Pfd. (neue oder metr.).

2. Die vorige Frage für sächs. Mase zu beantworten. Laut Regel β unter 19b. rechnet der Sachse: preuß. Resultat × Reductionszahl der Spalte Preußen aus Tab. 2b., also $331 \times 0{,}735 = 243$ Pfund (neue; metrische).

3. Tausend preuß. Fuß Messingdraht von $^1/_{10}$ Zoll Stärke haben an Gewicht G? — Da laut 19b. Regel α die dasige Gewichtszahl $2{,}857$ mit D^2L, hier $^1/_{100} \,.\, 1000 = 10$ zu multipliciren, folgt $G = 28{,}57$ Pfund.

4. Und wenn die vorige Größe englisches Mas wäre? — Nach der engl. Zeile der Spalte Preußen in Tab. 2b. reducirt sich voriges Resultat auf

$$28{,}57 \times 0{,}916 = 26{,}17 \text{ metr. oder neue deutsche Pfund.}$$

5. Das Gewicht je eines □ Fußes Zinkblech von $^3/_{16}$ Zoll Dicke preuß. Mas beträgt? — Laut erster Zeile von Tab. 19c. . . . $2{,}43 \times 3 = 7{,}29$ alte Pfund, oder (laut Zusatz 1) $7{,}29 \times 0{,}935 = 6{,}82$ neue Pfund.

6. Und wenn man die vorige Frage für englisches Mas u. Gewicht beantworten will? Laut Zusatz 2 und Tab. 13a. ist aus Tab. 19 statt 2,43 zu nehmen 2,43 × 0,9444, oder das Resultat 7,29 alte Pfund zu reduciren auf 7,29 × 0,9444 = 6,88 Pfund englisch pro □' engl. und bei $^3/_{16}$ engl. Zoll Dicke.

§ 36. Specielle Gewichtstafeln für Eisenwaaren (Tab. 20).

1. Zu welchem Gewicht berechnen sich Eisenstäbe von 6" Breite, $^1/_2$" Dicke und 10' Länge preußisch? — Querschnitt = 6 × $^1/_2$ = 3 □", also Gewicht pro lauf. Fuß laut Tab. 20a. = 3,542 × 3 = 10,626 a. Pfund, also pro 10' . . . 106,26 alt. Pfund, oder laut Zusatz 1 = 106,26 × 0,9354 = 99,2 n. Pfund.

2. Welche Länge nach preußischem Mase gehen von vorigem Stabeisen auf je 100 alte und je 100 neue Pfund?

Laut Tab. 20a. gehen bei 1 □" auf das alte Pfund 0,2833 Fuß; also bei 30 □" dreimal so wenig = 0,0944 Fuß; mithin auf 100 alte Pfund . . . 9,44 Fuß. Und auf 100 Zollpfund (laut Zusatz 1) 9,44 × 1,069 = 10,09 Fuß.

3. Ein östreichischer Techniker will die obige Frage 1 für sein landübliches Mas und Gewicht beantwortet wissen.

Laut Zusatz 2 zu Tab. 20a. wiegt 1 □" Stabeisen pro 1 Fuß Länge in Oestreich 3,542 × östr. Reductionsz. von Tab. 13a, also 3,542 × 0,8533 = 3,02 wiener Pfund; also bei 3 □" Querschnitt = 3,02 × 3 = 9,06 östr. Pfund.

4. (Rundeisengewicht) 100 Fuß Eisendraht von $^5/_{16}$ Zoll Stärke wiegen a. bei preußischem und b. bairischem Mas und Pfund?

Nach der a. Spalte der Tab. 20b. folgt als Antwort: Preußisch 0,272 × 100 = 27,2 alte Pfund, oder (laut Zusatz 1) 27,2 × 0,9354 = 25,5 Zollpfund. — Bairisch (laut Zusatz 2 oder Tab. 13a.) . . 27,2 × 0,6716 = 18,3 bairische Pfund.

5. Wieviel sächs. Ellen Rundeisen von $^7/_8$ Zoll Stärke gehen auf den Zollcentner? — Da nach Tab. 1 die sächs. Elle = 2', 1 Zollcentner = 100 Zollpfund = 107 alt. prß. Pfund, so folgt: Bei preuß. Mas und $^7/_8$ = $^{14}/_{16}$" Stärke gehen laut Tab. 20b. . . 0,47' auf 1 altes Pfund, bei sächs. Mas also laut Anmerkung u. Tab. 13b. . . 0,47 × 1,359 = 0,639' auf 1 altes Pfund, also gehen auf 107 alte Pfunde 0,639 × 107 = 68,4' oder 34,2 Ellen.

6. Gußeiserne Röhren, welche im Lichten 3 Zoll weit und im Eisen $^1/_2$" dick sind, wiegen pro 1 Fuß Länge?

a. Wenn preußisches Mas gemeint ist? Laut Zeile 3" . . 18,15 alte Pfund, oder 18,15 × 0,9354 neue Pfund = 17,0 Pfund.

b. Wenn das Mas englisches ist? Da Tab. 13a. für England 0,9444 als Faktor giebt, folgt 18,15 × 0,9444 = 17,1 Pfund englisch.

7. Gußeiserne Kugeln. Bei 6 Zoll Hohlung und 8 Zoll äuß. Durchmesser wiegt das Stück a. bei preußischem, b. bei östreichischem Mase? — a. Die Vollkugel bei 8" preuß. = 73,72 altes Pfund; bei 6" . . 31,10; somit die Hohlkugel 73,72 — 31,10 = 42,62 alte Pfund. — Und b. durch Multiplikation mit Tab. 13a, die für Oesterreich den Faktor 0,8533 zeigt, erhält man 42,62 × 0,8533 = 36,4 wiener Pfund (bei 6" und 8" östreichisch).

§ 37. Schlußbemerkung.

Auf diese und ähnliche Weise können viele Tausende von Kreuz- und Querfragen, wie und wo auch das mit dem Gebiete der Mas-, Geld- und Körpergewichtskunde in Verbindung stehende Geschäftsleben sie uns vorlegt, aus jenen 6 Blättern der Meßknechtsbrieftasche beantwortet werden. Und wird darunter, vollends in den wesentlichern Massystemen, gewiß selten eine vorkommen, für welche man, mag die Aufgabe auch noch so lakonisch sein, nicht sämmtliche zu ihrer Beantwortung nöthige Unterlagen in der Brieftasche vorfände. — Dem Pädagogen bietet sie dadurch zugleich eine reiche Quelle praktischer Verstandes- und Rechnungsübungen, namentlich auch insofern, als er dabei vom Schüler verlangen kann, daß er sich das, was er an Unterlagen zur Lösung braucht, auf den geeigneten Wegen selber suche, und dadurch für das Leben sich selbständiger mache; das ihm ja auch nicht bei jeder Aufgabe das dazu nöthige Material mundrecht vorgerichtet und nur zum Zugreifen mit vorzulegen pflegt.

Kap. 3. Zuwachs-, Zins- und Rentenrechnung.

NB. Wegen Ausshebung der betreffenden drei Blätter des polytechnischen Textbuches der Brieftasche, für den Fall, daß man sich zu den Arbeiten der Finanzrechnung nicht der Formeln und Logarithmen des Knechts, sondern der allerdings wesentlich bequemer und kurzer Hand zum Ziele führenden Zins- und Rententafeln bedienen will, ward bereits zu Anfang des vorigen Kapitels das Nöthige bemerkt. S. § 15.

A. Zuwachsrechnung.

§ 38. Wächst irgend ein Kapital oder Fond (Gut, Werth, Vorrath, Preis) inner n Jahren vom Vorwerthe k auf den Nachwerth K, oder um den

n=jährigen Gesammtzuwachs $Z = K - k$, oder in dem Nachwerths=Verhältnisse $K/_k = N$ [wo N dann den n=jähr. Nachwerth des Anfangswerthes oder Kapitales 1, d. i. den „Nachwerthsfaktor" bedeutet, und $N-1$ den n=jähr. Zuwachs dieser Kapitaleinheit oder den Zuwachsfaktor], so ist für fragliche n=jährige Wuchsperiode:

1. der durchschnittliche Fond $= \frac{K+k}{2}$ oder $\frac{N+1}{2} k$ . . . . (1)

2. der durchschnittliche Jahreszuwachs $z = \frac{K-k}{n}$ oder $\frac{N-1}{n} k$ . . (2)

Und dieser mittlere Jahreszuwachs z ausgedrückt als Procentsatz jenes mittlern Fonds oder Vorraths, oder

3. das durchschnittl. jährl. Zuwachsprocent $p\,\% = \frac{K-k}{K+k} \cdot \frac{200}{n}$ od. $= \frac{Z\ {}^{200}/_n}{2k+Z}$ od. $= \frac{N-1}{N+1} \cdot \frac{200}{n}$. (3)

Woraus dann zur etwaigen Berechnung oder Schätzung der drei andern hierbei mitspielenden Größen K, k und n, noch weiter folgt

4. der Nachwerth $K = \frac{200 + pn}{200 - pn} k$ oder $= \frac{{}^{200}/_n + p}{{}^{200}/_n - p} k$
also der Nachwerthsfaktor $N = K/k = \frac{200 + pn}{200 - pn}$ . . . (4)

5. der Vorwerth $k = \frac{200 - pn}{200 + pn} K$ oder $= \frac{{}^{200}/_n - p}{{}^{200}/_n + p} K$
und Vorwerthsfaktor $= \frac{1}{N} = \frac{k}{K} = \frac{200 - pn}{200 + pn}$ . . . . (5)

6. der Umfang der Periode $n = \frac{K-k}{K+k} \cdot \frac{200}{p}$ oder $= \frac{Z\ .\ {}^{200}/_p}{2k+Z}$ oder $\frac{N-1}{N+1} \cdot \frac{200}{p}$ (6)

1. Zusatz. Für die $n = 10$jährige Periode vereinfachen sich diese Formeln in folgende: § 39.

7. $p = \frac{(K-k)\,20}{K+k}$ oder $\frac{Z\,.\,20}{2k+Z}$ oder $\frac{(N-1)\,20}{N+1}$ . . . . (7)

8. $K = \frac{20+p}{20-p} k$, und $\frac{K}{k}$ oder $N = \frac{20+p}{20-p}$ . . . . (8)

9. $k = \frac{20-p}{20+p} k$, und $\frac{k}{K}$ oder $\frac{1}{N} = \frac{20-p}{20+p}$ . . . . (9)

2. Zusatz. Und für die $n = 20$jährige Periode: § 40.

10. $p = \frac{(K-k)\,10}{K+k}$ oder $\frac{Z\,.\,10}{2k+Z}$ oder $\frac{(N-1)\,10}{N+1}$ . . . . (10)

11. $K = \frac{10+p}{10-p} k$, und K/k oder $N = \frac{10+p}{10-p}$ . . . . (11)

12. $k = \frac{10-p}{10+p}$, und $\frac{k}{K} = \frac{1}{N} = \frac{10-p}{10+p}$ . . . . (12)

3. Zusatz. Bezeichnet man den n=jähr. Zuwachs Z oder die Differenz zwischen dem Nach= und Vorwerthe, also $K - k$ oder $N - 1$ kurzweg mit „Differenz", und $K + k$ oder $N + 1$ ebenso mit „Summe", so braucht man sich für die Praxis dieser Zuwachsrechnungen nur folgende drei leichte Regeln zu merken: § 41.

13. $p = \frac{\text{Differenz}}{\text{Summe}} \times \frac{200}{n}$ (13)

14. $n = \frac{\text{Differenz}}{\text{Summe}} \times \frac{200}{p}$ (14)

15. $N = \frac{{}^{200}/_n + p}{{}^{200}/_n - p}$ (15)

Wobei, wenn Zwischenerträge stattgehabt, diese (streng genommen in entsprech. Nachwerthsgröße) sowohl zur „Differenz" wie „Summe" zuzurechnen, sodaß man auch sagen kann statt Differenz: Voller n=jähr. Zuwachs, oder statt Summe: Doppelter Anfangswerth plus voller Zuwachs.

§ 42. Diese einfachen Formeln, deren wesentlichste wir zuerst in unserem älteren Meßknechtswerkchen empfohlen und so viel uns bekannt, bisher nur ein einziger (forst-) mathematischer Schriftsteller adoptirte, eignen sich zugleich sehr vortheilhaft zu Näherungsrechnungen oder Schätzungen im Sinne der wirklich jährlichen oder (unnöthig) sogenannten Zinsverzinsung, indem sie sich bei hinlänglich runden Zahlen sogar leicht im Kopfe lösen lassen und in ihren Resultaten mit denen des strengen Zinseszinses für gar viele Zwecke genau genug übereinstimmen, sobald nur n oder p, oder beide zusammen, nicht so groß, daß deren Produkt 100 übersteigt. Im Allgemeinen geben sie den Nachwerth etwas zu reichlich und die Zeit oder das Procent etwas zu knapp; umsomehr, je größer n oder p. In dem Grade, in welchem deren Produkt np dem Werthe 200 sich nähert, wird auch dies Näherungsverfahren (mindestens für Vor- und Nachwerthsbestimmungen) unbrauchbar, wie Formeln 4 und 5 ja gleich ersehen lassen. Aber selbst für solche Zwecke leisten sie, da man ja doch nicht immer die Logarithmen oder aber die dann unentbehrlichen Zins- und Rententafeln zur Hand hat, noch gute Dienste dadurch, daß man das dann zu große n in mehrere (10- od. höchstens 20jährige) Perioden zerlegt und den hierzu gefundenen Vor- oder Nachwerthsfaktor entsprechende male mit sich multiplicirt. Vgl. in folgendem Paragraph das 5. und 6. Beispiel.

Wir ersuchen demgemäs unsere Leser, im eignen Interesse ihres praktischen Rechnungslebens, die nächstfolgenden Erläuterungsbeispiele lediglich im Kopfe aus- und nachzurechnen, und dann deren Resultate mit denen der genaueren Zinsrechnung im darauf folgenden Paragraph zu vergleichen.

§ 43. Beispiele für verschieden lange Perioden.

Nach Formeln 1 bis 6; deren folgende Resultate man mit denen nach dem Princip des genau constant bleibenden Zuwachsprocentes in § 47 vergleichen wolle.

1) Wenn inner 50 Jahren (wo also $\frac{200}{n} = 4$) die Holzpreise in allen Sortimenten auf das durchschnittl. 3fache (also im Verhältniß k zu K wie 1 zu 3) gestiegen, so hatten während dieses Zeitraums die auf dem Stocke befindlichen Hölzer welchen allgemeinen Theuerungszuwachs im jährlich laufenden Procentausdrucke (Das c der forstlichen Reinertragstheorie)?

Nach Formel (3) $p = \frac{K-k}{K+k} \cdot \frac{200}{n}$ (od. Regel 13) folgt sehr schnell im Kopfe aus $\frac{3-1}{3+1} \cdot 4$ das $p = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\%$.

2) (Zuwachsprocent bei gegebenem Nachwerthsprocente) Wenn der Reinertrag und somit auch der Rentirungswerth eines Waldes oder dgl. in 20 Jahren um 30% steigt, so wächst er jährlich um wieviel Procent seines Laufenden?

Da $\frac{200}{n} = 10$ u. $Z = 30$ gegen ein $k = 100$, also $K = 130$, so folgt nach (3) od. (13) $p = \frac{30 \cdot 10}{230} = \frac{30}{23} = 1^1/_3\ \%$.

3) (Zuwachs oder Nachwerth gesucht) Um wieviel Procent seines Jetztwerths muß ein Holzbestands- oder sonstiges Kapital in 30 Jahren zuwachsen, wenn es sich (näherungsweise, siehe § 42) mit 3% verzinsen soll? — Im Sinne der Formel lautet diese Frage so: Wenn $k = 100$ mit $p = 3\%$ während $n = 30$ Jahren zunächst, so wird nach (4) $K = \frac{200+90}{200-90} 100 = \frac{2900}{11} = 264$. Nothwendiger Zuwachs also ca. 164 Procent oder das $1^2/_3$fache, sodaß also der erforderliche Nachwerth nahe = das **$2^2/_3$fache** des Anfangswerths zu sein hätte.

4) (Zuwachsperiode gesucht) In wie viel Jahren verdoppelt sich bei jährlich 3% Zuwachs am laufenden Werthe irgend ein Fond (annähernd, § 42)? Laut Formel 6 oder 14 ist $n = \frac{2-1}{2+1} \cdot \frac{200}{3} = \frac{200}{9}$; d. i. reichlich **22 Jahre.**

5) Mit welchem Faktor müßte man nach 4% einen Forstertrag im Bestandesalter 20 Jahr auf des Bestandes Abtriebszeit im Alter 80 prolongiren; oder:

welches ist ungefähr der Nachwerthsfaktor N für ein $p = 4$ und $n = 60$? — Da (lt. § 42) für $pn = 240$ die Form. 4 unbrauchbar, so ermittelt man darnach den 20jähr. Nachwerth als $N = \frac{200 + 80}{200 - 80} = \frac{28}{12} = \frac{7}{3} = 2^1/_3$; also von 20 zu 20 Jahren: mit dem $2^1/_3$fachen; folglich in 3×20 Jahren (indem man 2,3 oder 230 mittels Cw. Spalte kubirt) mit ungefähr dem 12fachen (Genau: allerdings nur mit dem $10^1/_2$ fachen).

Zusatz. NB. Um ohne Logarithmen dies Resultat etwas genauer zu haben, rechne man von 10 zu 10 Jahren, also nach einem 10jährigen $N = \frac{200 + 40}{200 - 40} = {}^3/_2$ oder 1,5. Diese Multiplikation von 10 zu 10 Jahren fände also 6mal statt. Um aber $1{,}5^6$ schnell aus dem Knechte abzulesen, rechnet man: 1,50 ins Quadrat und dieses dann in den Cubus. Da nun Qw. 150 auf 225 und Cw 225 auf 11 zeigt, so folgt damit schnell die Antwort: der **60jährige Nachwerthsfaktor bei 4% ist ca. 11.**

Beispiele für stets nur **10 und 20jährige** Perioden, wobei laut § 39 bis 41 einfach nach folgenden Regeln zu rechnen: § 44.

	bei 10jähriger	bei 20jähr. Periode	
Zuwachsprocent:	$p = \frac{\text{Differenz} \times 20}{\text{Summe}}$; . . .	$p = \frac{\text{Differenz} \times 10}{\text{Summe}}$	Bei Zwischenerträgen: Differenz = voller Zuwachs, Summe = doppelt. Anfangswerth plus voll. Zuwachs.
Nachwerthsfaktor:	${}^{10}N = \frac{20 + p}{20 - p}$; . . .	${}^{20}N = \frac{10 + p}{10 - p}$	

1) Ein Holzbestand, der in einem Jahrzehnt von 50 Klaftern auf 65 wächst, hat innerhalb desselben welchen Jahreszuwachs an Masse im Procentsatze des laufenden Vorraths? Da 50 zu 65 so viel ist, als 10 zu 13, so läßt sich für das Kopfrechnen einfacher sagen: Differenz = 3, Summe = 23, also $p = \frac{3 \cdot 20}{23} = 2{,}6\%$; oder: reichlich $2^1/_2\%$. (Dies ist zugleich das **a** oder **erste** oder **Quantitäts**-Zuwachsprocent in der forstlichen Reinertragstheorie.)

2) Wenn in einem Forstorte die Stammklasse der 6-Zoller mit 30 Pfennigen Nettoertrag pro Kubikfuß, inner 10 Jahren überzugehen pflegt in die Klasse der 7-, und inner 20 Jahren in die der 8-Zoller, und dabei deren Nettoertrag pro Kbfß. (die forstl. Qualitätsziffer im Systeme des Reinertragswaldbaues) jedesmal um 2 Pfennige steigt, welchen Jahreszuwachs im Reinertrage der Masseneinheit (ohne Rücksicht auf auf- oder absteigende Bewegungen in den Marktpreisen der Hölzer) besitzt demgemäs jenes Stammsortiment im nächsten und zweitnächsten Jahrzehnt? — Da man statt „30 auf 32 auf 34" auch sagen kann „15 auf 16 auf 17", mit der jedesmaligen „Differenz = 1", u. der „Summe" 31 resp. 33, so gilt fürs nächste Jahrzehnt $p = \frac{20}{31}\%$; fürs folgende $p = \frac{20}{33}\%$, also für jenes knapp ${}^2/_3$, für dieses noch knapper ${}^2/_3\%$. [Es ist dies das **b** oder **zweite** oder **Qualitäts**-Zuwachsprocent der forstlichen Reinertragstheorie.]

3) Wie gestaltet sich der Werth dieses b, wenn man gleich beide Jahrzehnte zusammenfaßt, d. i. vom 6- auf den 8-Zoller schließt? — Bei Zuwachs von 15 auf 17 inner 20 Jahren, entfällt ein $p = \frac{2 \cdot 10}{15 + 17} = \frac{20}{32}$ oder ${}^5/_8\%$.

B. Rechnung nach strengem Zinseszins
d. i. nach wirklichem Jahreszuwachs im Sinne des Zinsfußes der Geldkapitale.

Die strengere Zuwachsprocent- oder Zinseszins-Rechnung, welche bekanntlich eine thatsächliche oder durchschnittliche Mehrung oder Arbeit des Fonds nach genau gleichem Procent seiner laufenden Größe und demnach eine 1,0p-fache Mehrung von Jahr zu Jahr (also in einer geometrischen Progression mit dem Quotus oder Mehrungsfaktor 1,0p), anzunehmen hat, führt in Folge dessen zu nachstehenden Gesetzen und Regeln. § 45.

[Buchstabenbedeutung: p = laufend jährl. Zuwachsprocent; K = n jähr. Nachwerth von k, N dgl. von 1; k = n jähr. Vorwerth von K, V dgl. von 1; Z = n jähr. Zuwachsfaktor oder Zuwachs von 1, Z_k dgl. von k.]

Für die n Jahre umschließende Zuwachs- und Zinsperiode:

16. Nachwerth des Kap. 1 (Nachwerthsfaktor) . . . $N = 1{,}0\,p^n$; also $K = 1{,}0\,p^n \cdot k = N \cdot k$.

17. Vorwerth des Kap. 1 (Vorwerthsfaktor) . . . $V = \frac{1}{N} = \frac{1}{1{,}0\,p^n}$; also $k = \frac{1}{N} K = V \cdot K$.

18. Zuwachs des Kap. 1 (Zuwachsfaktor) . . . $Z = N - 1 = 1{,}0\,p^n - 1$; also $Z_k = (N - 1)\,k$.

19ᵃ. Jährlicher Mehrungsfaktor $1{,}0\,p = \sqrt[n]{\frac{K}{k}}$ oder $\sqrt[n]{N}$ aus dessen Decimalen man sogleich auch das p ablesen kann, oder auch nach:

19ᵇ. Zinsfuß od. jährl. Zuwachsprocent $p = (\sqrt[n]{K/k} - 1)\,100$ oder $(\sqrt[n]{N} - 1)\,100$.

20. Umfang n der Periode $n = \frac{\lg. N}{\lg. 1{,}0\,p}$ oder $\frac{\lg. K - \lg. k}{\lg. 1{,}0\,p}$.

Zusatz. Daß man die Jahresrente r eines Kapitalstocks k nach Regel

$$r = k \cdot \frac{p}{100} \text{ oder } \frac{k}{100} \cdot p$$

und den einer Jahresrente r entsprechenden **Kapitalstock** nach

$$k = r \cdot \frac{100}{p} \text{ oder } \frac{100\,r}{p}$$

findet, sei hier nur der Vollständigkeit wegen noch hinzugefügt.

§ 46. Bei Anwendung vorstehender Gesetze ist die Logarithmentafel unentbehrlich und leistet hierbei die des Knechtes Denjenigen, die sich ein wenig in deren Ablesung eingeübt, vortreffliche Dienste. Für die gewöhnlichen Zinsfuße aber, wie 3, 3½, 4, 4½ %, wird der praktische Rechner sich so viel als möglich stets einer nach Formel 16 u. 17 für die Kapital-Einheit berechneten **Tafel der Vor- und Nachwerthe** V und N (s. die polytechn. Brieftasche) oder auch blos der letztern bedienen (s. am Schlusse dieses Kap.), da ihn solche unverhältnißmäßig kürzer und bequemer zum Ziele führt; und zwar nach folgenden Regeln:

21ᵃ. Nachwerth K eines Fonds k: = k × Nachwerthsfaktor. (Prolongirungsformel.)

21ᵇ. Zinseszins oder n jähriger Zuwachs: = Fond oder Anfangswerth mal dem um 1 verminderten Nachwerthsfaktor N, also $Z_k = k\,(N - 1)$.

22. Vorwerth k eines (Nach-) Werths K: = K × Vorwerthsfaktor, oder = K × Reciproke des Nachwerths, oder K : N. (Discontirungsformel.)

23. Zuwachsprocent oder Zinsfuß p: Suche den Werth des gegebenen Mehrungsverhältniß K/k od. N in der der gegebenen Jahreszahl n entsprechenden Zeile der Nachwerthstafel auf.

24. Zeit oder Dauer n: Suche das vorige Verhältniß K/k oder N in der dem gegebenen Zinsfuße p entsprechenden Spalte der Nachwerthstafel.

25. Für Zinsfuße, die unter oder über die Tafel fallen, bedenke, daß das Resultat nur wenig alterirt wird, wenn man statt der einfachen Jahre Doppeljahre mit dem doppelten Zinsfuß, oder Halbjahre mit dem halben Zinsfuß annimmt. Selbst nach Vier- resp. Viertel-Jahren kann man zur Noth noch in dieser Weise rechnen. Siehe Beisp. 3 in § 48.

§ 47. Beispiele zu den Formeln des § 45, berechnet mit den Logarithmen des Knechts.

1. Das Beispiel 1 des § 43 zu lösen!

Gegeben $k = 1$, $K = 3$, $n = 50$; gesucht p. — Nach Formel 19ᵃ ist hier

$1{,}0\,p = \sqrt[50]{3}$; lg. 3 = 0,47712; 50) 0,00954. Und da hierzu der numerus (§ 12) = 1,0222 folgt $p = $ **2,22** oder 2²⁄₉ %

2. Desgl. das Beisp. 2 des § 43!

$k = 100$, $K = 130$; $n = 10$; also $1{,}0p = \sqrt[20]{1{,}30}$;

$$\left.\begin{array}{r} \text{lg. } 1{,}30 = 0{,}11393 \\ \hline 20)\quad 0{,}00570 \end{array}\right\}$$ num. $0{,}00570 = 1{,}0132$, also $p = \mathbf{1{,}32}\ \%$ od. knapp $1^1/_3\ \%$

3. Desgl. das Beisp. 3 des § 43!

Wenn $k = 100, n = 30, p = 3$, so folgt nach Formel 16:

$$K = 1{,}03^{30} . 100;\ \left.\begin{array}{r} \text{lg. } 1{,}03 = 0{,}01284 \\ \hline 0{,}3852\ (30 \\ \text{lg. } 100 = 2, \quad \\ \hline 2{,}3852 \end{array}\right\}$$ Und da zum Log. = 3852 der Knecht die Zahl 2427 gibt, folgt $K = 242{,}7$; also Antwort: nahe das **$2^4/_9$ fache**

4. Desgl. das Beisp. 4 des § 43!

Gegeben $p = 3$; $N = 2$; gesucht $n = \frac{\text{lg. } N}{\text{lg. } 1{,}0p} = \frac{\text{lg. } 2}{\text{lg. } 1{,}03}$, laut Logarithmentafel des Knechts $= \frac{0{,}30103}{0{,}01284} = \frac{30103}{1284} = \mathbf{23^1/_2}$ **Jahr.**

5. Desgl. das Beisp. 5 des § 43!

Gegeben $p = 4$, $n = 60$; gesucht der Nachwerthsfaktor $N = 1{,}0p^n = 1{,}04^{60}$. Da laut Logarith. des Knechts lg. $1{,}04 = 0{,}01703$, oder laut Rand derselben Tafel bis auf 7 Stellen genau $1{,}04 = 0{,}0170333$, und $0{,}0170333 \times 60 = 1{,}021998$, so folgt zur Mantisse 021998 oder 02200 aus der Logorithmentafel der zugehörige numerus = 10519, also $N = \mathbf{10{,}519}$ oder reichlich $\mathbf{10^1/_2}$.

Beispiele zu den Regeln des § 45; berechnet mit den Zinstafeln der Brieftasche. § 48.

1) Die Fälle 3, 4 des vorigen § 47 mittels der N-Tafel aufzulösen.

Ad 1. Da hier $p = 3$, $n = 30$ und $k = 100$ gegeben, so folgt schnell aus 3 %, Zeile 30 Jahr: $N = 2{,}4273$, also für $k = 100$ das $K = 242{,}73$.

Ad 2. Da hier $p = 3$, $N = 2$ gegeben, so folgt durch Herabgehen in der Spalte 3 % bis 1,8061 und 2,0938 einfach: „zwischen 20 und 25 Jahre"; oder etwas bestimmter aus diesem 1,8 und 2,1 mit der Differenz 0,3 (auf 5 Jahre) die Antwort:

$$20 + \frac{2{,}0 - 1{,}8}{0{,}3} . 5 = 23^1/_3 \text{ J. ca.}$$

2) Nach welchem Zinsfuß ca. hat ein Bestandskapital gearbeitet, das in 40 Jahren mit seinen nach 3 % prolongirten Zwischenerträgen auf das 4fache des Anfangswerthes gestiegen? — In Zeile 40 Jahre der N-Tafel den Nachwerth 4 aufgesucht, deutet die Ziffer 3,9593 auf: ganz nahe **$3^1/_2$ %**.

3) Das Zuwachsprocent für Beispiel 1 des vorigen §, das ist für den 3fachen Nachwerth bei 50 Jahr, mittels einer nur bis 3 % herabgehenden N-Tafel zu suchen? — Der Werth 3 in Zeile 50 Jahre aufgesucht, deutet unter 3 %. Nehmen wir also 25 Doppeljahre und suchen $N = 3$ in der Zeile 25 Jahr; gibt als Antwort: fast genau $4^1/_2$ % pro Doppeljahr; also ziemlich genau auch $4^1/_2 : 2 = 2^1/_4$ % pro Jahr.

C. Rentenrechnung.

Wo nicht das Gegentheil bemerkt ist, sei im Nachfolgenden unter einer Rente r immer die zu Ende jedes Jahres eingehend gedachte (nachschußweise oder gemeine) Jahresrente verstanden; n die Zahl ihrer einzelnen Glieder oder Eingänge, zugleich also auch die Jahre ihrer Dauer; K deren endlicher Kapital- oder Endwerth, d. i. die Summe aller Glieder zu und mit dem letzten Eingange sammt Zinseszins aller vorherigen r; und E der Endwerthsfaktor od. das K für ein $r = 1$, sodaß einfach $K = E \times r$. Ferner k der Werth der auf den Anfang des 1. Rentenjahres (also 1 Jahr vor dem 1. Eingang) descontirten u. summirten sämmtlichen n Rentenglieder, und A dieser Renten-Anfangswerth für die Einheitsrente $r = 1$; während N wiederum den Kapital-Nachwerth und V den Kapital-Vorwerth (oder $^1/N$) im Sinne von § 45 bedeutet. — Solche Renten (Erträge und Kosten) welche nicht jährlich, sondern in einer mehrere Jahre umfassenden Periode wiederkehren, und stets als zu Ende dieser Periode eingehend anzusehen (oder wenn innerhalb derselben früher erfolgend, dann auf das Perioden-Ende zu prolongiren) sind, sollen kurz als (gewöhnliche) Periodenrente aufgeführt § 49.

werden. Und um jene k u. K u. N u. V u. E u. A, die auf verschiedene Zeiträume, z. B. auf m und n Jahre bezogen sind, bequem unterscheiden zu können, wollen wir ihnen links oben einen dies anzeigenden Index ansetzen, wonach z. B. bedeutet:

^mN „der m-jährige Nachwerth" (des Kapitals 1), also der Werth $1{,}0p^m$

^nE „der n-jährige Endwerth" (der gemeinen Jahresrente 1). U. s. w.

Diejenige Zins- und Rententafel (z. B. der Brieftasche) welche die N u. E Werthe enthält, wollen wir kurzweg die N- resp. E-Tafel nennen; und diese Bezeichnung gleich auch auf deren zum betreffenden p und n gehörigen Werthe anwenden.

Auch wollen wir den Werth 0,0p oder $\frac{p}{100}$ den Einheitszins und dessen Reciproke $\frac{1}{0{,}0p}$ oder $\frac{100}{p}$ den Kapitalisirungsfaktor nennen, welcher letztre bekanntlich $33^1/_3$, $28^4/_7$ und 25 ist, jenachdem man nach 3, $3^1/_2$ oder 4 % rechnet.

Mit Bezug hierauf führt dann das Princip der wirklich jährlichen Verzinsung bei der Rentenlehre zu folgenden Formeln und Regeln*):

§ 50. 1. Für eine nachhaltige oder ewige Jahresrente 1 oder r:

26. $A = \frac{100}{p}$; $k = r \cdot \frac{100}{p}$ oder $\frac{100r}{p}$; $r = k \cdot \frac{p}{100}$ oder $\frac{k}{100} \cdot p$

§ 51. 2. Für eine n mal erfolgende Jahresrente:

27ᵃ. Endwerthsfaktor.

$E = \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p}$ od. $(N-1)\frac{100}{p}$, oder: die um 1 verminderte N-Tafel × Kapitalisirungsfaktor.

27ᵇ. Endwerth K von einer Rente r.

$K = E \cdot r$ oder $= (N-1)\frac{100}{p} \cdot r$ (Renten-Prolongirungsformel).

28. Rente r zum Endwerthe K.

$r = \frac{K}{E}$ oder $= \frac{1}{E} \cdot K$ oder $= \frac{1}{N-1} \cdot \frac{p}{100} \cdot K$; Zur Auflösung oder Verwandlung eines Kapitalwerthes K in eine vorausgehend n-malige Rente; also: dividire mit der E-Tafel in den gegebenen Endwerth K.

29ᵃ. Anfangswerthsfaktor.

$A = \frac{1{,}0p^n - 1}{1{,}0p^n \cdot 0{,}0p}$ oder $= \frac{E}{N}$ oder $= \frac{N-1}{N} \cdot \frac{100}{p}$

29ᵇ. Anfangswerth k von einer Rente r.

$k = A \cdot r$ oder $\frac{E}{N} r$ oder $\frac{N-1}{N} \cdot \frac{100}{p}$ r [Renten-Discontirungsformel]

30. Rente r zum Anfangswerth k.

$r = \frac{k}{A}$ oder $= \frac{N}{E} k$ oder $\frac{N}{N-1} \cdot \frac{p}{100}$ k; [Zur Auflösung oder Verwandlung eines Werths k in eine nachfolgend n-malige Rente; also: dividire mit der A-Tafel in's gegebene k; oder dividire das k-fache N durch die E-Tafel.]

§ 52. Beispiele.

1. Mit Anwendung der Logarithmen des Meßknechts: den Abtriebsertrag eines 100-jährigen Bestands von 1000 Thlrn. in Jahresertrag nach 3 % zu verwandeln. — Laut Formel 28 ist:

$r = \frac{p \cdot K}{(N-1)\,100} = \frac{3000}{(1{,}03^{100} - 1)\,100} = \frac{30}{1{,}03^{100} - 1}$; aber $1{,}03^{100}$ logarithmisch: . . .

lg. 1,03 = 0,0128372

1,28372 (100, dazu der num. = 19,219, also $r = \frac{30}{18{,}22} = $ **1,646**.

*) Rücksichts der Begründung dieser Formel s. Kapitel: „Insgemein."

2. Dasselbe Beispiel mittels der E-Tafel zu lösen! ... Da $r = \frac{K}{E}$ folgt schnell $\frac{1000}{607{,}29}$, d. h.: dividire jeden 100jährigen Ertrag mit 607,29; was hier gleich ohne Division mittels Reciprokentafel zu $r = 1{,}647$ führt.

3. 10 Thlr. oder 300 Gr. Aufforstungskosten als Anfangswerth in eine Culturkostenrente des Bestands bei 60jährigem Umtrieb mit 3% aufzulösen! — Am schnellsten mittels A-Tafel, als $\frac{300}{^{60}A} = \frac{300}{27{,}676}$ oder $\frac{100}{9{,}225}$, und nun mittels Reciprokentafel = **10,8** Gr.

Für Periodenrenten mit *0*-jähriger Periode.

1. Nachhaltige. (Man lese das *0* in § 53—55 nicht als Null.) § 53.

31. Anfangswerth oder Kapitalstock (zu Anfang der ersten Periode, oder *0* Jahre vor dem ersten Eingange)
$k = \frac{1}{^{0}N-1}\, r$ [also: Reciproke der um 1 verminderten N-Tafel; × r]

32. Periodenrente r zum Kapitalwerthe k (= *0* jähr. Zinseszins von k; daher) $r = (^{0}N-1)\, k$, also: die um 1 verminderte N-Tafel × k.

2. Nachhaltige und sofort beginnende. § 54.

33. Kapitalstock zu und mit dem 1. Eingange: $k = \left[1 + \frac{1}{^{0}N-1}\right] r$ oder $\frac{^{0}N}{^{0}N-1}\, r$ oder: Werth der Formel 31 plus r; woraus zugehörige Rente $r = \frac{^{0}N-1}{^{0}N}\, k$, d. h.: der der Periodenlänge entsprechend um 1 geminderte N-Werth dividirt durch den vollen N-Werth, × Kapitalstock.

3. Nicht nachhaltige, sondern nur n mal erfolgende. § 55.

34. Kapitalstock oder Anfangswerth zu und mit dem ersten Eingange:
$k = \frac{^{0n}N-1}{^{0(n-1)}N\,(^{0}N-1)}\, r$, woraus $r = \frac{^{0(n-1)}N\,(^{0}N-1)}{^{0n}N-1}\, k$.

35. Kapitalstock oder Anfangswerth, m Jahre vor dem ersten Eingange (oder: wenn die alle *0* Jahre repitirende und im Ganzen n mal erfolgende Rente r das erstemal nach m Jahren eingeht):
$k = \frac{^{0n}N-1}{^{n+0(m-1)}N.\,(^{0}N-1)}\, r$; woraus auch $r = \frac{^{n+0(m-1)}N.\,(^{0}N-1)}{^{0n}N-1}\, k$.

36. Endwerth (von jener wie dieser) ... $K = \frac{^{0n}N-1}{^{0}N-1}\, r$.

Beispiele. § 56.

1. Welchem (Brutto-) Bodenwerth k entspricht nach $p = 3^1/_2\,\%$ eine Forstwirthschaft, die pro Acker alle 80 Jahre 800 Thlr. cultur- und erntefreien Ertrag (an Abtriebs- und prolongirten Vorerträgen) abwirft?
Nach Formel 31 ist $k = \frac{1}{^{80}N-1}\, r$; was laut N-Tafel $= \frac{1}{14{,}676} \cdot 800$ und laut Reciprokentafel $= 0{,}06813 . 800 =$ **54,5** Thlr.

2. Das Culturcapital C für den 60jähr. Umtrieb eines Bestandes, dessen Aufforstung pro Acker 10 Thlr., nach p = 3% zu beziffern! — Dieß C ist der Anfangsw. einer Rente r = 10, die sofort u. dann alle 60 J. erfolgt;
also laut Formel 33 $= \left[1 + \frac{1}{^{60}N-1}\right] 10 = \left[1 + \frac{1}{4{,}8916}\right] 10$;
was laut Reciprokentafel = 1,2044 . 10 = 12,04 Thlr. — 2. Auflösung. Durch vorherige Bezifferung der Culturrente mittels E-Tafel .... 10 Thlr. Anfangswerth sind nach 60 Jahren laut N-Tafel = 58,916 Endwerth; und dieser laut E-Tafel = einer Jahresrente von 58,916 : 163,05 = 0,36 Thlr., und diese = einem Kapitalstocke von $0{,}36 . \frac{100}{3} = 12$ Thlr.

3. Eine alle 5 Jahre und im Ganzen 8mal erfolgende Zwischennutzung von 10 Thlrn. summirt sich nach 4% zu u. mit der letzten Nutzung auf den Betrag von? — Laut Formel 36 auf:

$$K = \frac{{}^{40}N-1}{{}^{5}N-1}\,10;\ \text{laut N-Tafel also auf}\ \frac{3{,}801}{0{,}217}\cdot 10 = \frac{38010}{217} = \mathbf{175{,}4}\ \text{Thlr.}$$

4. Zwei Forsttaxatoren sind rücksichts eines inner 20 Jahren abzutreibenden Bestandskomplexes, dessen Werth der Einfachheit halber = 100 Thlr. (Holz- und forstwirth. Grundkapital) gesetzt sein möge, in Widerstreit. A will einen gleichförmigen Etat, also jährlich in der Größe von ca. **5**; B will — wegen ungenügenden Zuwachses — einen fallenden Etat, und zwar mit im ersten Jahrfünft **8** Thlr., im zweiten **6** Thlr., im dritten **4** Thlr., im vierten **2** Thlr. Wie stellen sich, nach p = 4%, am Ende des fragl. Jahrzwanzigt die Nutzeffekte beider Entwürfe gegeneinander, wenn der Zwischenzuwachs außer Betracht zu bleiben hat?

Entwurf **A.** = Endwerth einer 20mal. Jahresrente **5** Thlr. laut E-Tafel = 29,78 . 5 = **149** Thlr. — Entwurf **B.** Jeder der vier verschiedenen Etats summirt sich auf das Ende seiner 5jährigen Periode laut Zeile 5 der E-Tafel auf 5,42 × **8** Thlr., resp. × **6** Thlr., resp. × **4** Thlr., resp. × **2** Thlr., das ist auf den Endwerth in jedem Jahrfünft = 43,4 Thlr., 32,5 Thlr., 21,7 Thlr., 10,8 Thlr.; davon die ersten drei auf den 15- beziehendl. 10- beziehendl. 5-jährigen Nachwerth zu prolongiren, d. i. laut N-Tafel mit 1,80, resp. 1,48 und 1,221 zu multipliciren sind, was deren Werth erhöht auf 43,4 × 1,80 = 78,1 Thlr.; 32,5 × 1,48 = 48,1 Thlr.; 21,68 × 1,22 = 26,4 Thlr. Macht somit in Sa. 78,1 + 48,1 + 26,4 + 10,8 = **163** Thlr. (Der zweite Plan gewährt also gegen den ersteren einen um nahe 10% höhern Nutzeffekt; abgesehen noch von dem anderweiten Vortheil, daß ein größerer Theil des betreffenden Boden-, Steuer- und Verwaltungs- (d. i. des forstlichen Bodenbrutto-) Kapitales zu der nothwendigen neuen und lohnendern Produktion zeitiger herangezogen wird.)

§ 57. 5. Beispiel einer speciell. Wald- u. Waldboden-Werthsberechnung:

Auf dem Th......r Walde pflegt der im 80-jährig. Umtriebe bewirth. (Fichten) Bestand nach den mittl. Holzpreisen der Gegenwart durchschnittlich in erntefreier od. Nettoziffer zu liefern: 800 Thlr. Abtriebs- od. Hauptertrag, und an Vorerträgen (im Laufe jedes Jahrzehnts u. auf dessen Ende summirt) im Alter 20 J. 3 Thlr.; 30 J. 10 Thlr.; 40 J. 30 Thlr.; 50, 60 u. 70 J. je 50 Thlr. Der Culturaufwand (Vor-, Haupt- u. Nachkosten der Bestandsgründung) ist mit 10 Thlr. und die Bodensteuer u. Verwaltungskosten seien mit ½ Thlr. pro Acker u. Jahr zu veranschlagen. (Die eigentliche Wald- od. Holzkapitalssteuer ist den Erntekosten zuzurechnen.) — **Frage:** wie hoch calculirt sich nach p = 3% **a**) der 80-jähr. Gesammtertrag od. erntefreie Gesammtertragsentwerth pro Acker? **b**) dessen Jahresgröße (Bestandsrente); **c**) der diesem Ertrage (a od. b) entsprechende Kapitalstock [das ertragsrechte Produktions-Gesammtgrundkapital G, = Boden-, Bodensteuer-, Verwaltungs- u. Culturkapital (B + S + V) + C = Bodenbruttowerth B′ + C]; **d**) der entspr. Bodenbrutto- u. Bodennetto(rentirungs)-Werth u. **e**) der Kosten-Werth eines beliebig z. B. **30** Jahr alten Bestands? — **Antwort: a**) Die 6 Vorerträge einzeln mittels N-Tafel auf das 80. Jahr prolongirt, summiren sich auf 438,23 Thlr.; also Gesammtertrag = 1238,23 Thlr. — **b**) Voriger durch den 80-jähr. Renten-Endwerth (321,36) divid., gibt Bestandsrente = 3,853 Thlr. — **c**) Erstere 1238,23 Thlr. (80-jähr. Zins) mit dem entspr. Zinsfaktor ${}^{80}N-1 = 9{,}641$ dividirt, od. letztre 3,853 (als nachhaltige Jahresrente) mit dem Kapitalisirungsfaktor $\frac{100}{3}$ multiplicirt, gibt das entsprechende Grundkapital G = 128,4 Thlr. — **d**) Der Culturaufwand im 80-jähr. Nachwerthe, = 10 × 10,641 = 106,41 Thlr., vom Gesammtertrage 1238,23 abgezogen, giebt denselben ernte- u. culturfrei als 1131,82 Thlr.; = 80-jähr. Nutzeffekt des Boden- + Steuer- + Verwltngs-Kap. od. Bodenbruttowerths B′; daraus durch Division mit obig. 80-jähr. Zinsfaktor... B′ = 1131,82 : 9,641 = **117,4** Thlr. Hiervon ab die kapitalisirt. Steuer- u. Verwltngskosten = $\frac{1}{2} \cdot \frac{100}{3}$ = 16,7; bleiben 100,7 Thlr. als dermal. mittl. Boden(rentirungs)werth des Tharander Waldes unter obigen Voraussetzungen. — **e**) Der (Kosten-)Werth des 30-jähr. Bestands = 30-jähr. Nachwerth der Culturkosten plus 30-jähr. Zins des Bodenbruttokapitales minus den auf das Jahr 30 prolongirten Vorerträgen: = 10 × 2,427 + 117,4 × 1,427 − 3 × 1,344 − 10 = 24,27 + 167,53 − 14,35 = 177,5 Thlr.

[Weiteres auf diesem Gebiete s. in B.'s „Forstliches Hülfsbuch für Schule u. Praxis ꝛc." 2. Auflage 1868.]

D. Verdichtete Zins- und Rentenrechnung

zum flüchtigen Rechnen im Stehen und Gehen den Schülern wie den Praktikern zur Einübung eben so sehr zu empfehlen als die leichten Regeln des § 41.

Dafern man sich ganz unabhängig von jedwedem Hülfstäfelchen machen will, merke man sich für den betreffenden Zinsfuß ein für allemal den 5-, 10- und 20-jährigen Nachwerth (^{5}N, ^{10}N, ^{20}N; vgl. § 45 u. 49); außerdem aber notire man denselben von 5 zu 5 Jahren in sein tägliches Portefeuille, etwa als Auszug aus der nachfolgenden (B.'s forstlichem Hülfsbuche entlehnten) Tafel 32. (Die sub I. § 14 bemerkten Knechte feinern Stichs enthalten einen solchen Auszug auf der Rückseite.) — Nehmen wir hier den erstgedachten Fall und zwar für das vielfach masgebliche $p = 3^1/_2\,\%$ an, wonach also wir uns ein für allemal zu merken hätten § 58.

den ^{5}N	^{10}N	^{20}N	woraus zu ersehen und zu merken: es steigt der (Nach-)Werth
= 1,18	1,41	1,99	von 5 zu 5 Jahren um 18 % oder um nahe 2 Zehntel,
ca. 1,2	1,4	2	„ 10 „ 10 „ „ 41 % „ um 4 Zehntel,
			„ 20 „ 20 „ „ 99 % „ auf nahe das 2fache.

Alle übrigen N sind nun leicht aus diesen drei Daten abzuleiten, und sogar durch Kopfrechnung, wenn wir die gröber gerundeten Werthe nehmen; wonach z. B. die Nachwerthe für das 1., 2., 3., 4. u. 5. Jahrzwanzigt = der 1., 2., 3., 4. u. 5.ⁿ Potenz von 2; also resp. = 2, 4, 8, 16 u. 32 (wobei die beiden letzten allerdings von deren genauern Werth 5,7 u. 31,2 schon ein wenig erheblicher abweichen). — Für die dazwischen liegenden ungraden Jahrzehnte braucht man also jene Werthe nur um 0,4 ihrer Größe zu erhöhen, wonach man leicht im Kopfe findet den $^{30}N = 2 + 2 . 0,4 = 2,8$ (genau 2,807); $^{50}N = 4 + 4 \cdot 0,4 = 5,6$ (genauer 5,585); $^{70}N = 8 + 8 \cdot 0,4 = 11,2$ (genau 11,11) u. s. w. Während eine Erhöhung des einen oder andern dieser Werthe um 0,2 seiner Größe dieselbe fürs Ende des nachfolgenden Jahrfünfts ergibt. — Endlich gedenke man, daß die Verringerung dieser n-jährigen Nachwerthe um 1, also die Zahl $^{n}N - 1$, den n-jährigen Zinseszins- oder Zuwachsfaktor ^{n}Z gibt.

Mit derlei wenigen N-Werthen im Kopfe (oder Portefeuille) braucht man sich dann von folgenden, in den §§ 45—55 liegenden Regeln eigentlich nur die fettgedruckten zu merken, um sich als einen allezeit schlagfertigen Zuwachs- und Finanzrechner zu erweisen; als § 59.

37. Für Kapital und n-jährigen Zuwachs
- a. Prolongirtes K. = **Kap.** × ^{n}**N**;
  also b. discontirtes K. = Kap. : N;
- c. Zuwachs (Zinseszins) = Kap. × ^{n}Z;
- d. Kapitalstock zum gegebenen n-jährigen Zuwachs oder Ertrag = **Ertrag** : ^{n}Z

38. Für die n malige Jahresrente r = 1.
- a. Renten-Endwerth $^{n}E = {}^{n}Z \times {}^{100}/p$;
  also b. Anfangswerth A = voriger E dividirt durch ^{n}N;
- c. Auflösung eines nach n Jahre fälligen Werths K in eine mit Ende des 1. Jahres beginnende n malige R. = Späterer Werth K dividirt durch ^{n}E;
- d. Auflösung eines jetzt fälligen Werths k in eine mit dem Ende des 1. Jahres beginnende n malige R. = Jetztwerth × ^{n}N dividirt durch ^{n}E, od. k : ^{n}A

39. Für die nachhaltige Periodenrente 1 mit u-jähriger Repetition
- a. Kapitalwerth zu Anfang der 1. Periode (oder u Jahre vor dem 1. Eingang) = **1** : ^{u}**Z**;
- b. Kapitalwerth zu und mit dem 1. Eingange = Voriges plus 1;
- c. Jetztwerth, wenn der 1. Eingang erst nach m Jahren erfolgt, discontire voriges (b) durch Division mit ^{m}N

40. Für eine nur n mal. Periodenrente 1 mit u-jähr. Repetition
- a. Kapitalwerth zu und mit dem letzten Eingange oder Endwerth = $^{un}Z : {}^{u}Z$;
- b. Werth zu einer ^{m}Jahre frühern Zeit als vorstehend: discontire vorigen durch Division mit ^{m}N

Wozu als Vervollständigung für den Fall, wo das p od. n gesucht wäre, noch die Näherungsregeln zu fügen aus § 41; als

$$13.\ p = \frac{\text{Differenz}}{\text{Summe}} \times \frac{200}{n} \quad \text{und} \quad 14.\ n = \frac{\text{Differenz}}{\text{Summe}} \times \frac{200}{p}$$

Anwendungen u. Beispiele aus dem Gebiete der Forstfinanzrechnun[g] mittels folgender Skala der Nachwerthe ^{5}N, ^{10}N zc. und folgender Hauptformel[n]

Jahre	5	10	15	20	40	60	80	100
3 % N =	$1^1/_7$	$1^1/_3$	$1^1/_2$	1,8	$3^1/_4$	5,9	10,6	$19^1/_2$
$3^1/_2$ =	1,2	1,4	$1^2/_4$	2,0	4	8	$15^1/_2$	31
4 % =	1,2	1,5	1,8	2,2	4,8	$10^1/_2$	23	50

n-jähr. Zuwachs $^{n}Z = {}^{n}N - 1$, u. Vo[r]werth $^{n}V = 1/\overline{^{n}N}$; Endwerth der n ma[l] Jahrrente $= {}^{n}E = {}^{n}Z \,.\, 100/p$; u. dere[n] Anfangs- od. Kapitalw. $= {}^{n}A = {}^{n}E : {}^{n}N$ und endlich der Anfangs- od. Kapital-werth einer jetzt und dann nur alle u Jahre erfolgenden Rente $= 1 + 1/\overline{^{u}Z}$ od. $1 + 1/\overline{^{u}N - 1}$

nach $3^1/_2$%: gerundet möglichst gleich im Kopfe auszrechnen!

§ 60. 1. Ein Durchforstungsertrag von 10 Klaftern (oder Thalern) in der Mitt[e] eines Jahrzehnts gewonnen, summirt sich auf das Ende des letztern in der Höh[e] von? ... Die 5-jährige Prolongirung erhöht jeden Ertrag u. dgl. um 2 Zehntel; also sind 10 in der Mitte des Jahrzehnts so viel als 12 am Ende desselben.

2. Im Frühjahr 1866 ward vom Verf. auf dem Döhlner Reviere (bei Tharand) in einem 20-jährigen Fichten-Bestande eine Durchforstung ausgeführt, welche pro sächs. Acker 3060 Stück oder 51 Schock Stangen u. nach dasigen Preisen = 80 Thlr. Reinertrag ergab (wobei noch 5200 Stämmchen pro Acker stehen blieben). In welcher Höhe stellt sich dieser Vorertrag zum 80-jährigen Abtriebsertrage? ... Antw.: Im 60-jährigen Nachwerthe, d. i. im nahe 8fachen, also mit reichlich 600 Thlr. (Weiteres hierzu s. in V.'s Forstls. Hülfsbuch, 2. Aufl. S. 188.)

3. Den vorigen Zwischenertrag = 80 Thlr. (im 20. J.) auf das Ende eines 90-jähr. Turnus oder um 70 J. zu prolongiren! ... Aus dem 60-jähr. Nachw. = 8 folgt der um 10 J. spätere durch Mehrung um 4 Zehntel, d. h. um 8 . 0,4 = 3,2; macht reichlich 11. Also hat jener Vorertrag von 80 Thlr. denselben wirthschaftlichen Nutzeffekt und Werth als dessen reichlich 11faches (oder als ca. 900 Thlr.) beim Abtriebe im 90.ten Jahre dieses Bestands.

4. Der Umtrieb eines Bestandes (im aussetzenden Betriebe) oder eines Waldes (d. i. einer Bestandsreihe im nachhaltigen Betriebe) sei ein 80-jähriger und gewähre (im Nettowerthe) an Vorerträgen 25 % des Hauptertrags, dergestalt, daß dieselben sich zu gleichen Theilen auf's Ende des 3. bis mit 7. Jahrzehnts repartiren. Mit welchem Prozentsatze hat man hiernach den Abtriebsertrag des Bestands zu erhöhen, um seinem Totalertrage mit Bezug auf jene 25 % Zwischennutzung finanzwirthschaftlich gerecht zu werden? — Auf 100 Thlr. Haubarkeitsertrag kommen also je 5 Thlr. Vorertrag im Alter 70, 60, 50, 40 und 30; um diese auf das Hauptabtriebsjahr 80, also um resp. 10, 20, 30, 40 u. 50 J. zu prolongiren, rechnet man: 5 Thlr. × Summe der entsprechenden Nachwerthe. Insofern man nun $^{10}N + {}^{20}N + {}^{40}N = 1{,}4 + 2 + 4 = 7{,}4$ bereits im Kopfe hat, braucht man nur noch den $^{30}N + {}^{50}N$, den man bekanntlich erhält, indem man den $^{20}N + {}^{40}N = 6$ um 10 J. prolongirt d. i. mit ^{10}N = multiplicirt, was 8,4 macht. Also Summe dieser $5N = 7{,}4 + 8{,}4 = 15{,}8$. Indem man sie rund als 16 und sonach die prolongirte Vorertragssumme = 5 Thlr. × 16 = 80 Thlr. setzt, folgt: Wenn ein Wald bei 80-jähr. Turnus **25 %** des Hauptertrags an (unprolong.) Zwischennutzungen in obiger Altersvertheilung gewährt, so hat man, um des Bestandes durchschnittlichen **Gesammtertrag** im Endwerthe auszudrücken, dessen Hauptertrag **um 80 Procent** zu erhöhen; (an Stelle der 25; und wenngleich diese 25 im Nachhaltswalde mit dessen Hauptertrag 100 alljährlich gleichzeitig erfolgen, haben sie doch den mehr als 3fachen Werth im Vergleich zu jenem, weil um eben so viel weniger Productionsaufwand erfordernd.)

§ 61. 5. Auf ähnlichem Wege wie vorstehend calculirte sich für den Tharander Wald (nach den Preisen der Jahre 1860/65) bei 80-jähr. Umtriebe der durchschnittliche Gesammtertrag pro Acker im erntefreien oder Nettowerthe zu nahe 1250 Thlr. Man soll diesen erntefreien Bestands-Gesammtertrag in derlei Bestands-Jahresertrag oder **Bestandsrente** verwandeln. Indem man ersteren (= 1250) als 80-jähr. Zinseszins eines Kapitalstocks k betrachtet, findet man durch Divis. mit dem 80-jähr. Zinsfaktor (laut im Kopfe befindl. Skala = $15^1/_2 - 1 = {}^{29}/_2$) leicht dieß k als $1250 \,.\, {}^{2}/_{29} = 86$ Thlr.; dessen Jahresrente = $86 \,.\, 0{,}03^1/_2$ = 3 Thlr. = fraglr. Bestandsrente.

6. Den nicht blos ernte- sondern auch culturfreien Gesammt- und Jahresertrag der betr. Bestandswirthschaft zu beziffern, wenn bei deren üblichen Kahlhiebs- und Pflanzungsbetriebe der Culturaufwand (an Vor-, Haupt- u. Nachkosten) mit 10 Thlr. pro Acker zu veranschlagen. — Da diese 10 Thlr. den Ertrag 80-jähriger Bestände um den 80-jähr. Nachwerth d. i. (laut N-Skala)

um das $15\frac{1}{2}$-fache, also um reichl. 150 Thlr. mindern, bleibt als *ernte- u. culturfr. Bestandsertrag* im Endwerth: $1250 - 150 = 1100$ Thlr. ca., u. im *Jahreswerthe* (wie sub 5 aus $k = 1100 \,.\, {}^{2}/_{29} =$ nahe 76 Thlr) $= 76 \times 0{,}03\frac{1}{2} = 2\frac{2}{3}$ Thlr.

7. Die durch die *Aufforstungs-* oder *Culturkosten* $= c$ ($= 10$ Thlr.) entstehende Ertragsminderung selbständig als **Culturkapital** C_k u. **Culturrente** C_r zu beziffern! — C ist $= c$ plus einem Kapitalstocke, der alle u (hier 80) Jahre den gleichen Betrag von c als Zins erzeugt und den man findet, indem man dieß c mit dem u-jähr. Zinsfaktor (bei $u = 80$ J. lt. obig. Skala mit $14\frac{1}{2}$) dividirt; $C_k = c + {}^{2}/_{29}\, c = 1\,{}^{2}/_{29}\, c$; also bei 10 Thlr. Culturaufwand ${}^{80}C_k = 10\,{}^{20}/_{29}$ oder nahe 11 Thlr. Und daraus die diese Bestandswirthschaft belastende *Culturrente* $C_r = C_k \times 0{,}0p$, hier nahe $11 \times 0{,}03\frac{1}{2} = 0{,}38$ Thlr. od. ca. 11 Groschen p. Jahr.

8. Wenn vom Bruttoertrage des Waldes als *forstliche Erntekosten* nicht blos die *Hauer-* und *Bringerlöhne*, sondern auch der Aufwand an *Gewerbs-* (-Holzkapitals- oder Ernte-) *Steuer-* u. an *Kassenwesen* abgezogen werden, so repräsentirt der *ernte- und culturfreie* Gesammtertrag des Bestandes (dort 1100 Thlr.) den (dort 80-jährigen) Nutzeffect der dann noch nur als solche *besteuerten und beförsterten* **Bodenkraft** oder (wie V. kurz zu sagen vorschlug) des **Bodenbruttowerths** B'. Auf welche Durchschnittshöhe stellt sich nun letztrer im *Tharander* Walde, wenn dessen soeben angeführter Gesammtertrag 1250 Thlr. (resp. 1100 Thlr.) als in solchem Sinne nicht blos ernte-, sondern auch steuer- u. culturfrei anzusehen wäre? Diese Frage ist gleichbedeutend mit der nach dem *Kapitalstocke*, welcher alle 80 Jahre 1100 Thlr. Zins erträgt. Da nun für den Kapitalstock 1 der 80-jähr. Nachwerth $= 15\frac{1}{2}$, also der 80-jähr. Zins $= 14\frac{1}{2}$, so folgt $B' = 1100 : 14\frac{1}{2}$ oder $2200 : 29 =$ ca. 76 Thlr. pro Acker. (Beim Calcul nach 3 % stellt sich dies B' jedoch auf nahe 120 Thlr.)

9. Der forstwirthschaftliche *Bodennettowerth* $B =$ Bodenbruttowerth B' minus kapitalisirte Bodensteuer- u. Verwaltungsrente $s + v$ [nach $(s + v)\, {}^{100}/p = (s + v)\, 28\frac{1}{2}$ ca.] würde sich demgemäs bei einem $s + v = \frac{1}{2}$ Thlr. pro Acker und Jahr stellen auf die Höhe von? ... 76 minus $\frac{1}{2} \,.\, 28\frac{1}{2}$ oder ca. **62** Thlr. (als durchschnittlr. Rentirungswerth bei den unterlegten Holzpreisen u. für ein $p = 3\frac{1}{2}$ %; für ein $p = 3$ % dagegen um die reichliche Hälfte höher).

10. Und somit die *forstliche Bodenrente*? Aus $B \times 0{,}0p$, hier als $62 \times 0{,}03\frac{1}{2} = 2{,}17$ oder ca. $2\frac{1}{6}$ Thlr. (Bei $p = 3$ % dagegen 3 Thlr.)

11. Womit hat man überhaupt den 20, 40, 60, 80 und 100-jähr. *Bestandsertrag zu dividiren, um denselben in rentenrechten Jahresertrag* (Bestandsrente) zu verwandeln? — Jene Erträge sind aufzufassen als die Endwerthe der fragl. Rente, und demgemäs mit dem betreffenden $n = 20$ 2c. jährigen Endwerthsfaktor ${}^{n}E$ zu dividiren. Dieser aber ist laut oben $= ({}^{n}N - 1)\, {}^{100}/p$. Daraus folgt für $p = 3\frac{1}{2}$ % der ${}^{20}E = 1 \,.\, {}^{200}/_{7} = 28\,{}^{4}/_{7}$; ${}^{40}E = 3 \,.\, {}^{200}/_{7} = \mathbf{85}$; ${}^{60}E = 7 \,.\, {}^{200}/_{7} = \mathbf{200}$; ${}^{80}E = 14\frac{1}{2} \,.\, {}^{200}/_{7} =$ *reichl.* **400**; ${}^{100}E = 31 \,.\, {}^{200}/_{7} =$ knapp **900**. Also von 20 zu 20 Jahren anfangs mit dem dreifachen, dann immer mit dem *reichlich doppelten* zu dividiren! (Und in gleicher Progression muß demnach auch der Bestands(gesammt)ertrag zu nehmen, wenn dessen $3\frac{1}{2}$*procent. Nutzeffekt* nicht geringer werden soll.)

12. Bei einem *Steigen der Holzpreise um jährlich* **c** % mit einem § 62.
gleichzeitigen Steigen der sämmtlichen Betriebskosten um ebenfalls c % muß auch *Nettorente* und *Nettowerth* des ganzen Waldes d. i. seines Bodens wie seines Holzvorraths um jährlich c % steigen. Steigen die Betriebskosten aber um das geringere e % ihrer seitherigen Größe u. betrug diese q % der Bruttorente R, so steigt die seitherige Nettorente $r = R\,(1 - {}^{q}/_{100}) = R\,({}^{100-q}/_{100})$ auf $r_1 = R\,(1 + {}^{c}/_{100}) - R \,.\, {}^{q}/_{100}\,(1 + {}^{e}/_{100}) = R\,({}^{100-q+c+qe/100}/_{100}) : 100$; d. h. im Verhältniß von r zu r_1 wie $(100-q)$ zu $(100-q+c+{}^{qe}/_{100})$ oder wie

$$1 : 1 + \frac{c + {}^{qe}/_{100}}{100-q} \text{ d. i. wie } 100 \text{ zu } 100 + \frac{100c + qe}{100-q}; \text{ also um } \frac{100c+qe}{100-q} \text{ Proc.}$$

Betrügen also die Betriebskosten 40 % ($= q$) des heutigen Bruttertrags und es wachsen ohne Steigerung derselben die Holzpreise in 20 Jahren um **10** % ($= c$), so ist am Ende dieser Zeit der heutige Wald- u. Waldbodenwerth um

$$c \,.\, \frac{100c}{100-q} = 30 \,.\, \frac{1000}{60} = \mathbf{17}\ \% \text{ gestiegen.}$$

Zus. Da nun ein derartiges Steigen der Holzpreise im allgemeinen für Deutschland statistisch nachgewiesen und auch für noch lange Zeit in sichrer Aussicht ist: so kann den Grundbesitzern wie dem Staate die Conservirung d. i. Erhaltung, Vergrößerung und gute Bewirthschaftung ihres Waldbesitzes im Sinne rationeller Forstfinanzrechnung u. Reinertragstechnik kaum eindringlich genug empfohlen werden.

TAFEL 32 ODER:

[n-jährige] Nachwerthe [${}^{n}N = 1{,}0p^{n}$]

insbesondere zur Schätzung des Zuwachsprocentes p, nach Regel:

Vorwerth plus n-jähr. Zuwachs divid. durch Vorwerth = ${}^{n}N$.

Die Verminderung dieser Nachwerthsfactoren um 1 giebt den n-jährigen Zuwach der Einheit, oder den Zins- u. Zuwachsfaktor ${}^{n}Z = 1{,}0p^{n} - 1$ od. ${}^{n}N - 1$.

Jahre n	Zinsfuss oder Zuwachsprocent p.											
	0,5	1%	1,5	2%	2,5	3%	3,5	4%	4,5	5%	5,5	6%
	In nebenstehenden Jahren wächst der Anfangs- oder Vorwerth 1 auf folgenden Nachwerth:											
1	1,005	1,010	1,015	1,020	1,025	1,030	1,035	1,040	1,045	1,050	1,055	1,060
2	1,010	1,020	1,030	1,040	1,051	1,061	1,071	1,082	1,092	1,102	1,113	1,124
3	1,015	1,030	1,046	1,061	1,077	1,093	1,109	1,125	1,141	1,158	1,174	1,191
4	1,020	1,041	1,061	1,082	1,104	1,125	1,148	1,170	1,193	1,215	1,239	1,262
5	1,025	1,051	1,077	1,104	1,131	1,159	1,188	1,217	1,246	1,276	1,307	1,338
6	1,030	1,062	1,093	1,126	1,160	1,194	1,229	1,265	1,302	1,340	1,379	1,419
7	1,036	1,072	1,110	1,149	1,189	1,230	1,272	1,316	1,361	1,407	1,455	1,504
8	1,041	1,083	1,126	1,172	1,218	1,267	1,317	1,369	1,422	1,477	1,535	1,594
9	1,046	1,094	1,143	1,195	1,249	1,305	1,363	1,423	1,486	1,551	1,619	1,689
10	1,051	1,105	1,161	1,219	1,280	1,344	1,411	1,480	1,553	1,629	1,708	1,791
11	1,056	1,116	1,178	1,243	1,312	1,384	1,460	1,539	1,623	1,710	1,802	1,898
12	1,062	1,127	1,196	1,268	1,345	1,426	1,511	1,601	1,696	1,796	1,901	2,012
13	1,067	1,138	1,214	1,294	1,379	1,469	1,564	1,665	1,772	1,886	2,006	2,133
14	1,072	1,149	1,232	1,319	1,413	1,513	1,619	1,732	1,852	1,980	2,116	2,261
15	1,078	1,161	1,250	1,346	1,448	1,558	1,675	1,801	1,935	2,078	2,232	2,397
16	1,083	1,173	1,269	1,373	1,485	1,605	1,734	1,873	2,022	2,183	2,355	2,540
17	1,088	1,184	1,288	1,400	1,522	1,653	1,795	1,948	2,113	2,292	2,485	2,693
18	1,094	1,196	1,307	1,428	1,560	1,702	1,857	2,026	2,208	2,407	2,621	2,854
19	1,099	1,208	1,327	1,457	1,599	1,753	1,922	2,107	2,308	2,527	2,766	3,026
20	1,105	1,220	1,347	1,486	1,639	1,806	1,990	2,191	2,412	2,653	2,918	3,207
25	1,13	1,28	1,45	1,64	1,85	2,09	2,36	2,67	3,01	3,39	3,81	4,29
30	1,16	1,35	1,56	1,81	2,10	2,43	2,81	3,24	3,75	4,32	4,98	5,74
35	1,19	1,42	1,68	2,00	2,37	2,81	3,33	3,95	4,67	5,52	6,51	7,69
40	1,22	1,49	1,81	2,21	2,69	3,26	3,96	4,80	5,82	7,04	8,51	10,29
45	1,25	1,56	1,95	2,44	3,04	3,78	4,70	5,84	7,25	8,98	11,13	13,76
50	1,28	1,64	2,11	2,69	3,44	4,38	5,58	7,11	9,03	11,47	14,54	18,42
55	1,32	1,73	2,27	2,97	3,89	5,08	6,63	8,65	11,26	14,64	19,01	24,65
60	1,35	1,82	2,44	3,28	4,40	5,89	7,88	10,52	14,03	18,68	24,84	32,99
65	1,38	1,91	2,63	3,62	4,98	6,83	9,36	12,80	17,48	23,84	32,46	44,14
70	1,42	2,01	2,84	4,00	5,63	7,92	11,11	15,57	21,78	30,43	42,43	59,08
75	1,45	2,11	3,05	4,42	6,37	9,18	13,20	18,95	27,15	38,83	55,45	79,06
80	1,49	2,22	3,29	4,88	7,21	10,64	15,68	23,05	33,83	49,56	72,48	105,8
85	1,53	2,33	3,54	5,38	8,16	12,34	18,62	28,04	42,16	63,25	94,72	141,6
90	1,57	2,45	3,82	5,94	9,23	14,30	22,11	34,12	52,54	80,73	123,8	189,5
95	1,61	2,57	4,11	6,56	10,44	16,58	26,26	41,51	65,47	103,0	161,8	253,5
100	1,65	2,70	4,43	7,24	11,81	19,22	31,19	50,50	81,59	131,5	211,5	339,3

1. Wenn der Durchm., um v. 12″ auf 15″ zu wachsen, 20 Jahre braucht, so hat er pro Jahr ein durchschnittliches Zuw.%? ... Da sein ${}^{20}N = 15:12 = \mathbf{1{,}25}$, so folgt laut Zeile 20 $p = 1{,}1\%$; u. daraus für die Fläche ein wenig über 2,2% (weil $= 2p + p^2/_{100}$).
2. Ein Holzbestand, der in einem Jahrzwanzigt von 60 Klaftern Vorrath auf 90 Klaftern steigt und dazwischen auch noch 20 Klftrn. an Durchforstungserträgen gewährt, besitzt, wenn man diesen Gesammtmassenzuwachs von 50 Klftrn. im Sinne eines durchschnittlichen Zuwachsprocents p auf die betreffenden Jahre repartirt, nach ${}^{20}N = 110:60 = 11:6 = 1{,}83$ laut Zeile 20 Jahr einen Massenzuwachs von (durchschnittl. jährl.) reichlich **3%**.
3. Wenn aber voriger Zwischenertrag betrachtet werden kann als eingehend in der Mitte des fraglichen Jahrzwanzigt u. somit im betreffenden Haushalte zu ca. $3^1/_2$% fortwachsend, so wäre derselbe jenen 90 Klaftern Haubarkeitsvorrath nicht als 20, sondern im 10-jähr. Nachwerth zu 4% u. somit als $20 \times 1{,}5 = 30$ anzurechnen. Das hiernach berichtigte p ergibt sich dann aus $(90 + 30):60 = 120:60 = 2{,}0$ nach Zeile 20 Jahr als reichl. $3^1/_2$%.
4. Wenn eine in 10 Jahren zu erwartende Eisenbahn-Eröffnung die Steigerung der Holzpreise für einen gewissen Wald um mindestens 30% voraussetzen lässt, so haben dessen Bestände inner dem fragl. Jahrzehnt, ausser ihrem Quantitäts- u. Qualitätszuwachsprocente (a + b), noch ein specifisches drittes od. Theuerungszuwachs% (c), das, als den 10-jähr. Nachwerth 1,30 erzeugend, laut Zeile 10, reichl. $2^1/_2$% pro Jahr ausmacht.
5. **Für mehr als 6% annähernd:** Rechne nach Halbjahren u. halbem p; etc. Ein Werth, der in 10 J. auf's 4fache stieg, mehrte sich nach welchem lauf. p? ... Da N = 4 weder in Zeile 10 noch 20, so findet man es in 30 (Dritteljahre) bei $4^3/_4$% pro Dritteljahr; also fragls. $p = 4^3/_4 \cdot 3 = 14^1/_4$ ca. — Oder aus Zeile 40 (Vierteljahre) bei $3^1/_2$%; also pro Jahr $3^1/_2 \cdot 4 = 14$% ca. — Das logarithmisch genaue p laut obiger Formel ist = 14,88%.

Kap. 4. Insgemein

und zur Ergänzung der gewöhnlichern elementar-mathematischen Lehrbücher.

Vorbemerkung. § 63.

Jene mathematischen Pädagogen, welche mit dem geistig-bildenden Elemente (das stets voranzustellen) so viel als möglich das praktisch-nützende verknüpfen wollen und darum mit dem V. vielleicht darin einverstanden sind, daß man durch Einführung der in den vorgehenden Kapiteln abgehandelten und ähnlichen Uebungen das Bildungsleben mathematischer Mittelklassen nützlich befruchten könne: werden dem V. vielleicht nicht minder zustimmen, wenn er empfiehlt, in diesen Kreis auch die folgenden arithmetisch-geometrischen Erweiterungen mit einzuschließen. Gern ist zuzugeben, daß dieselben zu ihrer ganz strengmathematischen Begründung theilweis mehr Zeit in Anspruch nehmen, als jene Klassen in der Regel dazu aufzuwenden haben. Anders aber ist es, wenn wir eingedenk der Wahrheit — wonach „das Beste oft des Guten Feind" — für solche Verhältnisse aus der Noth eine Tugend machen und demgemäs nicht verschmähen, auch jenen Weg des Induktionsbeweises mit zu betreten, der ja in der so fruchtbaren Naturwissenschaft und Technik der überwiegend herrschende ist, und jedenfalls als Uebung im logisch-empirischen Forschen auch nicht ohne ergänzende Bildungskraft sein kann. Als praktischen Pädagogen müsse uns, meint V., schon die Thatsache genügen, daß wir bei Verschmähung dieses Beweisweges unsern Schülern eine Menge der wichtigsten und nützlichsten Wahrheiten u. Hülfen vorenthalten müßten, während derselbe immerhin wissenschaftliche Uebungen und Ueberzeugungen zu gewähren im Stande ist, die an geistiger Tiefe und Nützlichkeit denen der andern (nicht mathematischen) Disciplinen zum allermindesten nichts nachgeben.

A. Zur Reihenlehre.

☞ Beim Schulgebrauche zweckmäßig dem Kap. 3 voraus zu nehmen. ☜ § 64.

Die Reihe der Binomial-Coefficienten und die binomische Reihe überhaupt.

Wenn man nach den Regeln der gewöhnlichen algebr. Multiplikation den zweigliedrigen („binomischen") Ausdruck $a + b$ nach und nach auf immer höhere Potenzen erhebt, so erhält man bekanntlich folgende Gliederreihen:

$(a \pm b)^2 = 1a^2 \pm 2ab + 1b^2$

$(a \pm b)^3 = 1a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm 1b^3$

$(a \pm b)^4 = 1a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + 1b^4$

$(a \pm b)^5 = 1a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5a^3b^2 \pm 1b^5$

$(a \pm b)^6 = 1a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + 1b^6$

$(a \pm b)^7 = 1a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a_{,}b^3 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm 1b^7$

Das jeder dieser Zeilen oder Reihen zu Grunde liegende, von Newton zuerst in strenger Allgemeinheit bewiesene interessante Gesetz lautet also:

$$1)\ (a \pm b)^n = \overset{1.}{a^n} \pm \overset{2.}{\frac{n}{1} a^{n-1} b} + \overset{3.}{\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2} \pm \overset{4.}{\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^{n-3} b^3}$$

$$\overset{u.}{\frac{n\,[n-1]\,[n-2] \ldots [n-(u-2)]}{1.2.3 \quad \ldots \quad (u-1)}\, a^{n-(u-1)}\, b^{u-1}}$$

eine Reihe, die immer nur $n + 1$ Glieder haben kann, da das $(n + 2)^{te}$ u. alle nachfolgenden in ihrer Coefficientenformel den Faktor $(n - n) = o$ enthalten.

Fände man für gut, den Exponenten n in der Form $m + 1$ oder $m - 1$ auszudrücken, so würden jene „Coefficienten" folgende Gestalt annehmen:

$$2)\ \text{für } (a + b)^{m+1} \ldots \frac{m+1}{1};\ \frac{(m+1)\,m}{1 \cdot 2};\ \frac{(m+1)\,(m)\,(m-1)}{1.2.3}\ \text{ꝛc.}$$

$$3)\ \text{für } (a + b)^{m-1} \ldots \frac{m-1}{1};\ \frac{(m-1)\,(m-2)}{1 \cdot 2};\ \frac{(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\ \text{ꝛc.}$$

welche Formeln also ebenfalls „**Binomialcoefficienten**" darstellen und zu den gleichen Zifferreihen wie oben führen müssen.

Die entsprechndn. Zifferreihen, als z. B. 3,3 | 4,6,4 | 5,10,10,5 | 6,15,20,15,6 | ꝛc. wolle man sich fest einprägen, weil deren Entstehungsgesetz und somit auch

deren Erscheinung auch noch auf anderem Gebiete z. B. in der arithm. Reihen- und der Cambinationslehre wiederkehrt. Wo also bei empirischen oder sonstigen Untersuchungen eine derlei Zahlenfolge zum Vorschein kommt, hat man Grund, ein den Binomialcoefficienten entsprechendes Naturgesetz zu vermuthen.

§ 65. Die arithmetische Reihe der ersten Ordnung.

(Obgleich in keinem Lehrbuche fehlend, sei dieselbe doch des Zusammenhangs wegen hier mit aufgeführt und aus gleichem Grunde daran erinnert, daß man die „Reihen im engern Sinne" bekanntlich mit dem unpassenden Beinamen „arithmetisch" u. „geometrisch" unterscheidet: je nachdem die Folgeglieder aus den früheren durch Addition oder durch Multiplikation abzuleiten sind.)

„Reihe der 1. Ordnung," bekanntlich = Reihe mit konstanter Differenz

wie z. B. die natürliche Zahlenreihe {1 2 3 4 5 u / 1 1 1 1} mit dem Anfangsgliede a = 1 und den Differenzen b = 1

Sei a das Anfangsglied der Haupt- und b das der ersten, hier constanten, Differenz-Reihe, u der Werth des nten Gliedes und s die Summe der n-Glieder (a bis u), so gestaltet sich bei allmäliger Entwicklung leicht das Ganze wie folgt:

Constante Differenz.	Der Hauptreihe Gliederfolge.	Gliedersumme
	1. a	vom 1. bis mit
b	2. $a+1b$	2. $2a+1b$ *)
b	3. $a+2b$	3. $3a+3b$
b	4. $a+3b$	4. $4a+6b$
b	5. $a+4b$	5. $5a+10b$
b	folglich	folglich *)
	n.) $a+(n-1)b$	n.) $\frac{n}{1}a+\frac{n(n-1)b}{1\cdot 2}$

*) Wie zu sehen, bilden sich die zwei Coefficienten dieser Summenformel = 2 u. 1, 3 u. 3, 4 u. 6, 5 u. 10 ꝛc. nach dem Gesetze der binomischen Reihe; so daß $s = \frac{n}{1}a+\frac{n(n-1)b}{2} = \frac{n}{2}[2a+(n-1)b]$; während $u=a+(n-1)b$.

Und wenn man die Formel für das allgemeine Glied u auf a oder b oder n reducirt und den gefundnen Werth in die Summenformel einsetzt, erhält man jene bekannten 5 folgenden Grundgleichungen:

Für . . . a . b . n . u — a . b . n . s — a . n . u . s

1) $u=a+(n-1)b$; 2) $s=[2a+(n-1)b]\,n/_2$; 3) $s=\frac{a+u}{2}\,n$;

a . b . u . . s — b . n . u . s

4) $s=\frac{(a+u)(b+u-a)}{2b}$; 5) $[2u-(n-1)b]\,n/_2$

(Gewöhnlicher wird die Differenz b durch den Buchstaben d bezeichnet.)

Anwendung. Die Summenformel für die natürlichen Zahlen von 1 bis n [gewöhnlich kurz durch das griechische S („Sigma") als Σn angedeutet] anzugeben. —

Da für Σn laut oben $a=1$ u. $b=1$ u. $n=n$, so folgt aus Formel 2 sofort

$$\Sigma n=(2+n-1)\frac{n}{2}=\frac{(n+1)n}{2}=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}$$

§ 66. Die arithmetische Reihe der zweiten Ordnung.

Bei solcher Reihe müssen die ersten Differenzen eine Reihe der 1. Ordnung, die 2. Differenzen also eine Konstante bilden, wie das z. B. bei der natürlichen Folge der Quadratzahlen stattfindet, deren

Haupt-Reihe	a = 1;	4	9	16	25	36	49	64	81 ꝛc.
Reihe der ersten Differenz	b = 3;	5	7	9	11	13	15	17	
Reihe der zweiten Differenz	c = 2;	2	2	2	2	2	2		

Aus den 3 Anfangsgliedern c, b u. a können wir nun wieder wie im vorigen Paragraphen durch successive Bildung und Analogie für das nte Glied (der Hauptreihe) = u und die Summe s der n-Glieder von a bis u das allgemeine Gesetz finden; wie aus folgender Zusammenstellung leicht zu ersehen, wenn man deren Spalten nach und nach von oben nach unten verfolgt.

Constante Diff.	Erste Diff. R. (R. d. 1. Ord.)	Der Hauptreihe — Gliederfolge.	Der Hauptreihe — Gliedersumme
		1. a	vom 1. bis mit
	b . . .	2. $a+1b$	2. $2a+1b$
c	$b+1c$	3. $a+2b+1c$	3. $3a+3b+1c$
c	$b+2c$	4. $a+3b+3c$	4. $4a+6b+4c$
c	$b+3c$	5. $a+4b+6c$	5. $5a+10b+10c$
c	$b+4c$	6. $a+5b+10c$	6. $6a+15b+20c$
		folglich *)	folglich *)
		n.) $u=a+\frac{n-1}{1}b+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}c$	n.) $s=\frac{n}{1}a+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c$

*) Ein Vergleich der Coefficienten und ihrer Bildungsart mit denen der Binomialreihe zeigt sofort deren Uebereinstimmung für u mit denen vom Bin. Exponenten $(n-1)$, bis s mit denen vom Exponenten n.

Anwendung. Die Summenformel für die natürlichen Quadrate von 1 bis n^2 (symbolisch Σn^2) zu konstruiren.

Laut Anfang dieses Paragraphen heißt dieß nichts anderes als: s finden für ein $a=1$, $b=3$ und $c=2$; wonach aus Vorstehendem leicht

$$s=n+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}3+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}2,$$

woraus durch einfaches Ausmultipliciren ꝛc. unschwer sich ergibt

$$\Sigma n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{1\cdot 2\cdot 3} \text{ oder } \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

Z. B. Die Summe der 12 ersten natürlichen Quadratzahlen $1+2^2+\ldots+12^2$? — Laut erster Formel $=\frac{12\cdot 13\cdot 25}{6}=26\cdot 25=650$.

Die arithmetische Reihe der dritten Ordnung, § 67.

bei welcher die ersten Differenzen eine Reihe der 2. Ordnung, die zweiten eine Reihe der 1. Ordnung und also die dritten eine Konstante bilden, wie dieß z. B. in der natürlichen Reihe der Würfel der Fall, indem deren

Haupt-Reihe	$a=$ **1**;	**8**	**27**	**64**	**125**	**216**	**343**	**512**	**729** ꝛc.
R. d. 1. Diff.	$b=$	7;	19	37	61	91	127	169	217
R. d. 2. Diff.	$c=$		12;	18	24	30	36	42	48
R. d. 3. Diff.	$d=$			6;	6	6	6	6	6

läßt sich rücksichts ihrer beiden Fundamentalformeln für u und s auf ganz ähnliche leichte Weise wie die vorgehende begründen. Man verfolge nur von Nachstehendem Spalte für Spalte von oben nach unten:

Constante Diff.	Erste Diff. R. (R. d. 1. Ord.)	Erste Diff. R. (R. d. 2. Ord.)	Der Hauptreihe — Gliederfolge.	Der Hauptreihe — Gliedersumme
			1. a	vom 1. bis mit
		b	2. $a+1b$	2. $2a+1b$
	c	$b+1c$	3. $a+2b+1c$	3. $3a+3b+1c$
d	$c+1d$.	$b+2c+1d$	4. $a+3b+3c+1d$	4. $4a+6b+4c+1d$
d	$c+2d$.	$b+3c+3d$	5. $a+4b+6c+4d$	5. $5a+10b+10c+5d$
d	$c+3d$.	$b+4c+6d$	6. $a+5b+10c+10d$	6. $6a+15b+20c+15d$
d	$c+4d$.	$b+5c+10d$	7. $a+6b+15c+20d$	7. $7a+21b+35c+35d$
d	$c+5d$ . .		folglich *)	folglich *)
			n.) $u=a+\frac{n-1}{1}b+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}c+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3}d$	n.) $s=na+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}b+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}c+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}d$

*) Indem ein Vergleich der vorstehenden Koefficienten mit denen der Binomialreihe in § 64 leicht deren verwandtes Bildungsgesetz erkennen läßt.

Anwendung. Den Ausdruck für Σn^3 d. i. die Summenformel der natürlichen Würfelreihe von 1 bis n^3 zu construiren. — Insofern laut Anfang dieses Paragraphen diese Reihe eine arithmetische Folge der 3. Ordnung mit den Anfangsgliedern $a = 1$, $b = 7$, $c = 12$ und $d = 6$, folgt leicht aus vorstehender allgemeinen Formel

$$s = n + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} 7 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} 12 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} 6$$

woraus durch gewöhnliche Ausmultiplikation unschwer sich ergibt

$$\Sigma n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 \text{ oder } \frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}.$$

Z. B. Die Summe der ersten 12 natürlichen Würfel oder $1^3 + 2^3 + 3^3 \ldots + 12^3$? Laut erster Formel $= \left[\frac{12 \cdot 13}{2}\right]^2 = 78^2 = 6084$.

§ 68. Die sogenannte geometrische Reihe (vgl. § 65).

Sei wiederum a das erste, u das letzte oder nte Glied, q der Quotus oder Faktor von Glied zu Glied und s die Summe aller n Glieder, so hat man bekanntlich

$$\overset{1.}{s = a} + \overset{2.}{a q} + \overset{3.}{a q^2} + \overset{4.}{a q^3} \ldots + \overset{n.}{a q^{n-1}}; \text{ also}$$

$$1) \quad u = a q^{n-1} \text{ und } s = a(1 + q + q^2 \ldots + q^{n-3} + q^{n-2} + q^{n-1})$$

Multiplicirt man letzte Gleichung mit q und zieht von diesem Producte

$$s q = a(q + q^2 + q^3 \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} + q^n)$$

die ursprüngliche Gleichung wieder ab, so verschwinden alle Glieder der Klammer bis auf das Glied 1 und q^n und es bleibt $s q - s = a(q^n - 1)$, woraus leicht

$$2) \quad s = a \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Aus diesen 2 Grundgleichungen, welche von den 5 Elementen a, q, n, u, s die Combinationen a q u s, a n u s und q n u s nicht mit repräsentiren, erhält man diese noch fehlenden drei, indem man Formel 1) auf q^n u. auf q u. auf a reducirt und diese Werthe (selbstverständlich einzeln) in 2 einsetzt. Man erhält dadurch, ähnlich wie in § 65, folgende alle möglichen Fälle repräsentirenden 5 Formeln:

Für die Beziehung: a. q. n. u.; a. q. n. s.; a. q. u. s.;

$$1) \; u = a q^{n-1}; \; 2) \; s = a \frac{q^n - 1}{q - 1} = a \frac{1 - q^n}{1 - q}; \; 3) \; s = \frac{u q - a}{q - 1};$$

a. n. u. s.; q. n. u. s.

$$4) \; s = \frac{\sqrt[n-1]{u^n} - \sqrt[n-1]{a^n}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}; \; 5) \; s = \frac{u(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}.$$

Da aber die Formeln 4 und 5 unter Umständen schwierig zu lösen, z. B. wenn a, u und s gegeben und n gesucht wird, so thut man besser, sich auch für die Fälle 4 und 5 nur der Formeln 1, 2 und 3 zu bedienen; was dann allerdings einen kleinen Umweg erfordert. Als z. B.: Wieviel Glieder müßte eine geometrische Reihe haben, die beim Anfangsgliede $a = 1$ und Endgliede $u = 100$ die Summe $s = 1000$ besäße? Gegeben also a, u, s, gesucht n. Man suche aber erst q mittels Formel 3, hier also mittels $1000 = \frac{100 q - 1}{q - 1}$ woraus leicht $q = 1{,}11$. Mittels der nun bekannten $a = 1$; $q = 1{,}11$ und $u = 100$ findet sich durch Formel 1) oder $100 = 1{,}11^{n-1}$ durch Logarithmirung $\lg. 100 = (n - 1) \lg. 1{,}11 = n \lg. 1{,}11 - \lg. 1{,}11$ und daraus $n = \frac{\lg. 100 + \lg. 1{,}11}{\lg. 1{,}11}$, was laut Log. des Meßknechts $= \frac{2 + 0{,}04532}{0{,}04532} = \frac{2{,}04532}{0{,}04532} = 45\frac{1}{8}$. D. h. Jene Summe 1000 mit einem $a = 1$ und $u = 100$ entspräche also einer geometrischen Reihe von 45 Gliedern nebst einem kleinen Bruchtheil des 46. Gliedes und mit dem Quotus 1,11; d. h. mit dem Zuwachse von Glied zu Glied um 11%. — Fragt man endlich, wie groß dieß Zuwachsprocent wäre, wenn die Zahl der Glieder netto 45 sein müßte, so folgt bei gegebenem $a = 1$, $n = 45$ und $u = 100$ mittels Formel 1 oder $q^{n-1} = u/a$ hier $q^{44} = 100$, d. h. $44 \lg. q = \lg. 100$ oder $\lg. q = \frac{2}{44} = \frac{1}{22} = 0{,}04546$, woraus nach Meßknechts-Logarithmen Tafel $q = 1{,}1103$ ca.; Zuwachsprocent also $= 11\frac{1}{33}$%.

Die Kapitals-Nachwerths- u. Zinsreihe (Zur kurz. Begründung v. Kap. 3, B). § 69.

Eine wachsbare Größe — Kapitalstock, Holzbestand ꝛc. — habe zu Anfang des ersten Jahres der in Betracht zu ziehenden Zuwachsperiode den „Anfangswerth" k, und werde oder mehre sich in jedem Jahre um p % ihres laufenden Werths (d. i. des vorjährigen Endwerths), so müssen diese einzelnen End- oder Nachwerthe eine geometrische Reihe bilden, deren Quotus $1 + p/_{100}$ (gewöhnlich 1,0p geschrieben); oder, wenn $p/_{100}$ als Jahreszuwachs der Einheit oder Einheitszins mit dem Buchstaben e bezeichnet, eine Reihe mit dem jährlichen „Mehrungsfaktor" $(1 + e)$. Hiernach ergeben sich leicht folgende Reihen und allgemeinen Formeln für die Nachwerthe und Zinsen:

zu Ende des Jahres	Des Kapitales k Nachwerth . . .	Zins	Des Kapitales 1 Nachwerth	Zins
1.	$k(1+e)$; also Zins $= k \cdot e$		${}^1N = (1+e)$ od. $1{,}0p$;	${}^1Z = {}^1N - 1$
2.	$k(1+e)^2$	$k[(1+e)^2 - 1]$	${}^2N = (1+e)^2$ od. $1{,}0p^2$;	${}^2Z = {}^2N - 1$
3.	$k(1+e)^3$	$k[(1+e)^3 - 1]$	${}^3N = (1+e)^3$ od. $1{,}0p^3$;	${}^3Z = {}^3N - 1$
n.	$k(1+e)^n$	$k[(1+e)^n - 1]$	${}^nN = (1+e)^n$ od. $1{,}0p^n$;	${}^nZ = {}^nN - 1$

Bei Annahme eines „Zuwachsprocents" oder Zinsfußes von der Größe $p = 4$ $(e = 0{,}04)$ müßte also ein Kapitalstock $k = 100$ in 20 Jahren wachsen auf den Nachwerth ${}^{20}N \cdot k = 1{,}04^{20} \cdot 100 = 2{,}191 \cdot 100 = 219$ Thlr.; oder an Zuwachs oder Neukapital geworben haben (nach ${}^{20}Z = {}^{20}N - 1 = 1{,}191$) $1{,}191 \times 100 = 119$ Thlr.; — gleichviel ob dieser Zuwachs buchstäblich u. thatsächlich od. nur durchschnittlich u. vergleichsweise als ein 4procentiger erfolgt, und gleichviel, ob derselbe sich jährlich als Neukapital direkt mit dem Kapitalstocke k vereinigt, wie beim Holzbestande, oder neben demselben irgendwo im Volkshaushalte selbständig wirbt, wie gewöhnlich bei den andern Kapitalien.

Bei der sogenannten „einfachen Verzinsung" rechnet man bekanntlich: „Zu 4 % wachsen 100 Thlr. in 19 Jahren auf $100 + 19 \cdot 4 = 176$, in 20 Jahren aber auf $100 + 20 \cdot 4 = 180$ Thlr.; d. h. im 20. Jahre von 176 auf 180 oder von 1 auf $1{,}02_2$ d. i. nur um reichlich 2 %. Wer also, für beispielsweise 20 Jahre, gegenwärtige Einnahmen oder Ausgaben nach dem Verhältnisse 100 : 180 prolongirt oder spätere drgl. nach dem Verhältnisse 180 zu 100 discontirt, der rechnet für's erste Jahr nach 4 %, für's zwanzigste nach reichlich 2 %, ist also in großer Verwirrung begriffen, wenn er meint, dabei durchweg zum Zinsfuß 4 zu kalkuliren! — **Ueberhaupt:** Nur das obige Gesetz der wirklich jährlichen (unnöthig sogenannten Zins-) Verzinsung kann allein dem eigentlichen u. natürlichen Begriffe des Zinsfußes p entsprechen und correcte masgebliche Werthe liefern; wonach also sich ergibt der End- od. Nachwerth K eines Kapitales k nach n-Jahren . . . $K = 1{,}0p^n \cdot k$ (= Prolongirungsformel), also der Jetzt- od. Vorwerth k eines nach n-Jahren fälligen Kap. K . . . $k = \frac{1}{1{,}0p^n} K$ = (Diskontirungsformel).

Die gemeine Rentenreihe (Zur kurzen Begründung von Kap. 3, C). § 70.

Die gemeine (nachschußweise) Jahresrente ist nichts anderes als eine zu Ende jedes Jahres fällige Kapitalzahlung r. Erfolgen diese Leistungen nur n-Jahre lang und also n-mal, und summirt man dieselben mit ihren Zinsen oder im betreffenden Nachwerthe auf das Ende des letzten Jahres, so besteht diese Summe von hinten her gerechnet

1) aus dem einfachen Werthe des letzten Rentengliedes $= r$; 2) aus dem einjährigen Nachwerthe des vorletzten laut § 69 $= r\,1{,}0p$; 3) aus dem 2-jähr. N. des drittletzten $= r\,1{,}0p^2$ u. s. f. bis zum Nachwerthe des 1. Gliedes, das als zu Ende des 1. Jahres und somit $n - 1$ Jahr vor dem Ende erfolgend, diesem Ende sich mit $r\,(1{,}0p)^{n-1}$ anschließt. Dieß führt zu

$$\text{Renten-Endwerth} = r\,[\overset{1.}{1} + \overset{2.}{1{,}0p} + \overset{3.}{(1{,}0p)^2} + \ldots \overset{n.}{(1{,}0p)^{n-1}}]$$

Die Summe dieser geometrischen Reihe von n-Gliedern, deren $a = 1$ und $q = 1{,}0p$ ergibt sich nach § 68 oder nach $s = a\frac{q^n - 1}{q - 1}$ leicht als $s = \frac{1{,}0p^n - 1}{1{,}0p - 1}$ und somit:

Jede auf das Ende ihres letzten Jahres und einschließlich ihres letzten Eingangs nach dem Zinsfuße p oder Einheitszinse 0,0p = e summirte gemeine Jahresrente r stellt sich demgemäs auf den

$$\text{Endwerth } K = \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} \cdot r \text{ od. } \frac{(1+e)^n - 1}{e}$$

Wenn man dagegen jedes Glied obiger Rente auf den Anfang ihres ersten Jahres discontirt, wo man dann hat laut § 69:

Anfangswerth des 1. Eingangs $= \frac{r}{1{,}0p}$; des 2. $= \frac{r}{(1{,}0p)^2}$ und des letzten oder

nten $= \frac{r}{1{,}0p^n}$ und folglich für sämmtliche Eingänge oder Rentenbeträge

$$k = r\left[\overset{1.}{\frac{1}{1{,}0p}} + \overset{2.}{\frac{1}{(1{,}0p)^2}} \cdots + \overset{n.}{\frac{1}{1{,}0p^n}}\right]; \text{ woraus durch Multiplikation mit } \frac{1{,}0p^n}{1{,}0p^n}$$

$k = \frac{r}{1{,}0p^n}\,[1{,}0p^{n-1} + 1{,}0p^{n-2} \ldots + 1]$; und da die Klammer ganz die obige Reihe nur in umgekehrter Ordnung darstellt, folgt

$$k = \frac{r}{1{,}0p^n} \cdot \frac{1{,}0p^n - 1}{0{,}0p} = \frac{1{,}0p^n - 1}{1{,}0p^n \times 0{,}0p}\, r \text{ (Vgl. § 51)}$$

als Formel für den Anfangswerth oder für die eigentliche Kapitalisirung einer „nachschußweise" d. i. gegen Ende jedes J.'s erfolgenden n-maligen Jahresrente. (Kürzer folgt k durch Discontirung des obigen Endwerths K d. i. aus $k = \frac{K}{1{,}0p^n}$)

§ 71. **Populärer Beweis, inwiefern alle Gegner des wirklich-jährlichen oder Zinses-Zinses ganz inkonsequente Leute sein müssen.**

Jedermann kapitalisirt bekanntlich die unaufhörliche Jahresrente r nach Regel k = r . 100/p; d. h. er multiplicirt dieselbe bei beispielsweise p = 4 % mit 25 u. sagt: Je 1 Thlr. nachhaltige Rente ist = 25 Thlr. Kapital; damit aber sagt er (meist unbewußt) nichts andres als: „ist gleich dem nach voriger Formel berechneten Anfangswerthe; $= \frac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n \, . \, 0{,}04} \times \frac{100}{4}$.

Wer also bei Kapitalisirung einer Nachhaltsrente r nach Regel k = r . 100/p rechnet, ist lediglich ein Zinseszinsrechner vom reinsten Wasser!

Indem nämlich erstrer Ausdruck leicht in die Formel $\frac{1}{0{,}04} \cdot \frac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n} =$ $25\,\frac{1{,}04^n - 1}{1{,}04^n} = 25\left[1 - \frac{1}{1{,}04^n}\right]$ zu bringen, zeigt er in dieser Formel, daß für ein ins Unendliche wachsendes n deren negatives Glied zur Null hinwächst, also daß 25 [1 — 0] = 25 der genaue Ausdruck für die wirklich endlose Reihe sei. Jene Formel aber bildete sich laut § 70 aus der Reihe $\frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}04^2} + \frac{1}{1{,}04^3}$ 2c. d. h. aus der zinseszinsrechten Discontirungsreihe

$$(1)\quad k = \overset{1.}{\frac{1}{1{,}04}} + \overset{2.}{\frac{1}{1{,}082}} + \overset{3.}{\frac{1}{1{,}125}} + \overset{4.}{\frac{1}{1{,}170}} \cdot \cdot \overset{20.}{\frac{1}{2{,}191}} \cdot \cdot \overset{40.}{\frac{1}{4{,}80}} \cdot \cdot \overset{60.}{\frac{1}{10{,}52}} \text{ 2c.}$$

Die „einfache" Zinsrechnung, konsequent angewendet, muß aber sagen:

$$(2)\quad k = \frac{1}{1{,}04} + \frac{1}{1{,}08} + \frac{1}{1{,}12} + \frac{1}{1{,}16} \cdot \cdot \frac{1}{1{,}80} \cdot \cdot \frac{1}{2{,}60} \cdot \cdot \frac{1}{3{,}40} \text{ 2c.}$$

eine Reihe, deren (Diskontirungs-) Nenner, wie man sieht, sämmtlich kleiner sind, gegen die vorige richtige; weshalb sie schon bei 44 Gliedern auf den Kapitalwerth 25,065 und bei 100 Gliedern auf 39,84 also ca. 40 führt. Während also Jedermann bei 4 % rechnet: „die ewige Rente hat zum Kapitalwerth ihr 25-faches", müßte der konsequent „einfache Zinsrechner" dazu fügen: „aber, wenn sie nur 100mal eingeht, so ist ihr Kapitalwerth um ihr 15faches größer! während der konsequente Anhänger der Cotta'schen Mittelzinsen zu sagen hätte: „nein, nicht um ihr 15-, sondern um ihr 7½-faches größer!" — Welch ein Widersinn hierin!

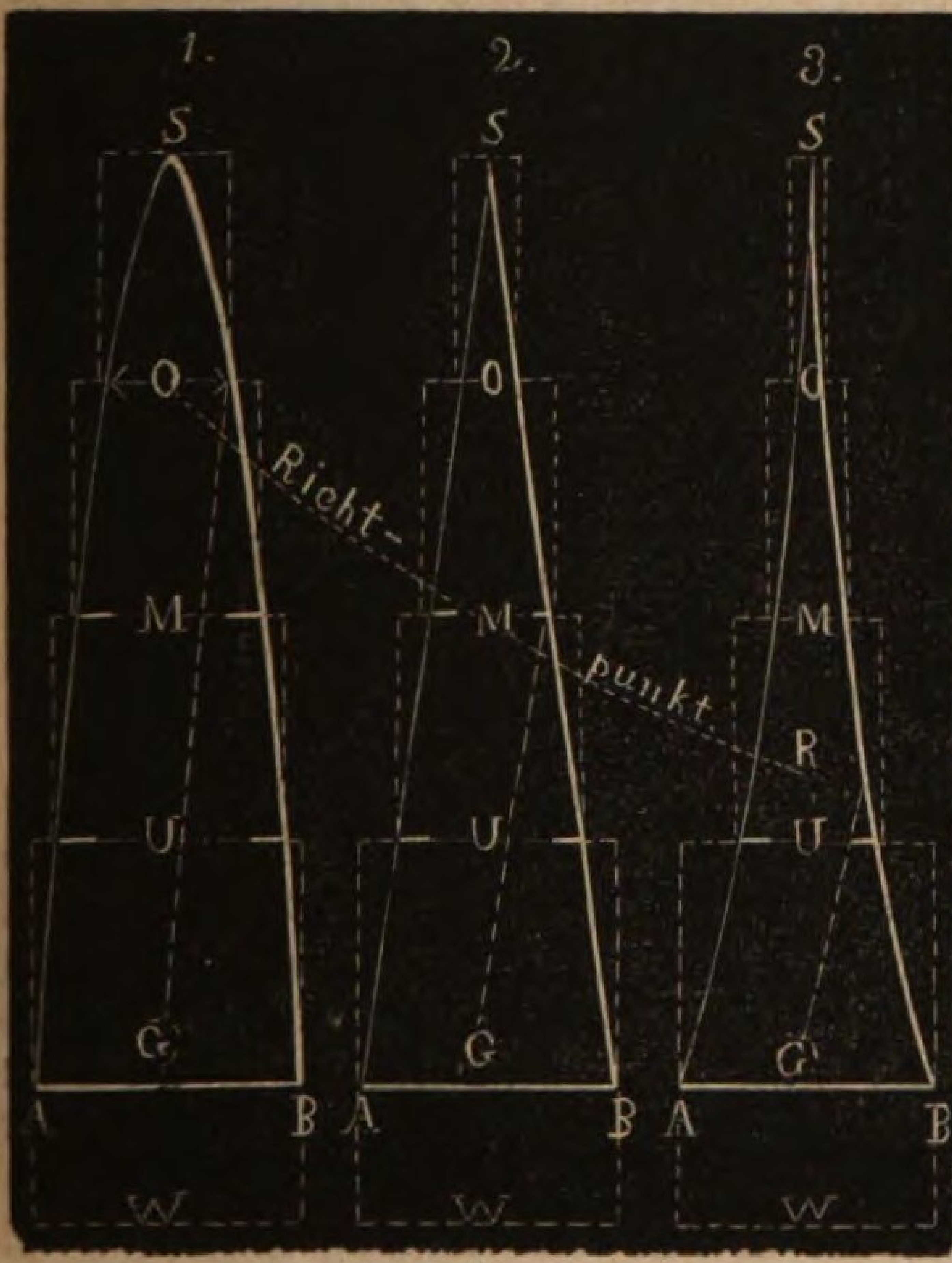
Die allgemeine Form dieses Beweises gestaltet sich leicht aus k =
$$\frac{1}{(1+e)}+\frac{1}{(1+e)^2}+\frac{1}{(1+e)^3}=\frac{1}{1+e}+\frac{1}{1+2e+e^2}+\frac{1}{1+3e+3e^2+e^3}$$
im Vergleich zur Discontirung nach sogenannten einfachem Zins, wo dann
$$k=\frac{1}{1+e}+\frac{1}{1+2e}+\frac{1}{1+3e}\cdots\cdots$$

Hoffentlich aber ist auf dem Gebiete der Finanzrechnungen die Zeit für immer dahin, wo man irgend ein anderes als das nach dem Prinzip des jährlichen Zinseszinses kalkulirte Resultat als dasjenige anerkennt, das allein dem wirklichen Begriffe und der wirklichen Arbeit des angenommenen Rechnungszinsfußes p entspricht.

B. Anwendung der arithmetischen Reihen auf die Pyramiden- und Kegellehre.

Vorbemerkung. Die folgende instructive Anwendung kann unschwer selbst Solchen, die fast noch gar keine geometrische Vorbildung besitzen, hinreichend klar gemacht werden, sobald man ihnen nur vorher an zwei einfachen Figuren zeigt, 1. wie und warum jedes Dreieck durch Verbindung der Mittelpunkte seiner Seiten in 4 congruente Dreiecke zerfällt, also jedes Dreieck, dessen sämmtliche Dimensionen sich auf die Hälfte verkleinern, zwar die gleichen Winkel oder gleiche Gestalt aber nur das Viertel der ursprünglichen Fläche behält; 2. inwiefern dieß nun auch von jedem n-Ecke gilt, das man von irgend einem innern Punkte aus in n-Dreiecke zerlegt; 3. wie demzufolge jede in allen ihren Dimensionen sich verhältnißmäßig vergrößernde Fläche ihrem Inhalte nach wachsen oder sich verhalten müsse, wie die Quadrate zweier homologen Dimensionen; und 4., wie jede Grundfläche, welche parallel zu sich nach der Höhe fortrückt, ein Prisma erzeugt, das für jeden Fuß Höhe soviel Kubikfuße (und Kubikfuß-Bruchtheile) enthält, als die Grundfläche Quadratfuße (und Quadratfußbruchtheile) besitzt. Welche drei oder vier Sätze man, ohne der Würde der Wissenschaft wesentls. zu vergeben, durch logischen Anschauungsunterricht mit entsprechender Beweiskraft in dies arithmetische Praktikum zur nützlichen Belebung einschieben kann. Jedenfalls ist durch dieses Einschieben Gelegenheit gegeben, das Uebungsmaterial für die mathematisch-naturwissenschaftlichen Excursionen zeitiger als es sonst geschehen könnte, wesentlich zu bereichern, und auch sonst das Interesse für das Studium und die Anwendungen der Geometrie bei Zeiten wirksam zu erwecken, beziehlich zu erhöhen (Vgl. in der Brieftasche über Baum- Form- u. Massenschätzung). § 72.

Die drei Grundformen der Pyramiden und Kegel. § 73.



Man denke sich in jede der nebenstehenden 3 Pyramidalformen unter AB das Profil der Grundfläche G. Diese Grundfläche (z. B. = G Quadratfuße) kann ebensowohl irgend ein beliebiges Vieleck als ein Kreis u. s. w. sein. Im letzteren Falle hätten wir es also mit einem 1. ausgebauchten, 2. geradseitigen oder gemeinen, und 3. eingebauchten Kegel zu thun. Der Buchstabe D bedeutet irgend eine beliebige Dimension jener Grundfläche G; bei den Kegelgestalten z. B. den Durchmesser (die „Grundstärke"). — Man denke sich nun jede der drei G's parallel zu sich stetig fortrückend nach dem Scheitel S, während sie dabei zugleich (in allen ihren Dimensionen gleichmäßig, also mit Beibehaltung ihrer Gestalt) stetig kleiner wird und bis zum Verschwinden in S. Die lothrechte Höhe von S über AB oder G sei = H = Vollhöhe; die Punkte U, M und O bedeuten deren 1., 2. u. 3.'s Viertel oder deren „Unter-, Haupt- und Obermitte."

Die daselbst befindlichen der Grundstärke D und Grundfläche G analogen Stärken und Stärkenflächen wollen wir mit D_u, D_m, D_o und G_u, G_m, G_o bezeichnen. Die lothrechte Höhe des Scheitels S über irgend einen der Grundfläche G parallelen Querschnitt oder irgend eine Stärkenfläche heiße deren Ober- oder Scheitelhöhe. Und derjenige Oberpunkt, wo die Stärken just halb so groß, als die entsprechenden Dimensionen der Grundstärke, also die *Stärkenfläche = 1/4 der Grundfläche* (wo bei irgend einer Kegelform also der Durchmesser = dem halben Durchmesser AB) heiße der *Richtpunkt* und seine Höhe über dem Grunde die *Richthöhe* der fraglichen Pyramidal- oder Kegelform.

Läßt man nun bei der Erzeugung dieser drei Figuren durch obgedachtes Fortrücken der Grund-Stärkenfläche G mit stetigem Schwinden derselben das letztere nach folgenden drei Gesetzen geschehen: die G nimmt ab 1. *einfach* analog den Oberhöhen, 2. analog den *zweiten* und 3. analog den *dritten* Potenzen der Oberhöhen: so entstehen hierdurch, wie aus dem Folgenden leicht ersichtlich, im Falle 1. eine *ausgebauchte*, 2. eine *gradseitige* und 3. eine *eingebauchte* Form; wobei, wie die Curvenlehre beweist, erstere Ausbauchung gleichzeitig dem Gesetze der (gewöhnlichen oder apollonischen) Parabel und letztere *Einbauchung* dem der *Neil'schen* (Parabel-Evoluten-) Curve entspricht, weshalb man zweckmäßig beide Formen bestimmter als „*paraboloidisch*“ und „*neiloidisch*“ bezeichnen kann.

§ 74. Die (parabolisch) *ausgebauchte Pyramide* und der *Parabelkegel*. (Nr. 1 in der Figur S. 47.)

Indem hier laut vorigen § 73 $G_o : G_m : G_u : G = 1/4 : 2/4 : 3/4 : 1$ folgt $G_o = 1/4\, G$; $G_m = 2/4$; $G_u = 3/4\, G$. Bei dieser Form ist also die Stärkenfläche in der eigentlichen oder Hauptmitte genau 1/2 und in der Dreiviertelshöhe oder Obermitte genau 1/4 so groß als am Grunde; also laut Gesetz der ähnlichen Figuren die Stärke in der Hauptmitte $= \sqrt{1/2} = 0{,}71$ oder 71 % und in der Obermitte $= \sqrt{1/4} = 1/2$ oder 50 % der Grundstärke. Die parabolische Form ist also für die stereometrische (namentlich Schätzungs-) Praxis gut gekennzeichnet dadurch, daß die Partie ihrer halben Grundstärken, d. i. ihre Richtpunktspartie grad in der Obermitte gelegen, also ihre Richthöhe $h = 3/4\, H$ sein muß.

Denkt man sich über die 4 Grundflächen G_o, G_m, G_u und G die in der Zeichnung punktirt angedeuteten 4 Prismen resp. Cylinder mit den Höhen $1/4\, H$ errichtet, so entsteht eine Art Terrassenpyramide, deren Körperinhalt oder Volumen $V = G_o \,.\, H/4 + G_m \,.\, H/4 + G_u \,.\, H/4 + G \,.\, H/4 = (G_o + G_m + G_u + G)\, H/4$ oder laut oben $= (1/4 + 2/4 + 3/4 + 4/4)\, G\, H/4 = (1 + 2 + 3 + 4) \frac{GH}{4^2} = G \times 5/8\, H$. Denkt man sich aber, statt in nur 4, die Höhe in eine größere Anzahl, nämlich in n gleiche Theile getheilt und bedeutet, vom Scheitel S an ausgehend, G_1, G_2, G_3 die 1., 2., 3. Stärkenfläche und somit $G_n = G$ die letzte oder Grundfläche, so hat man laut Bildungsgesetz dieses Körpers

$$\left.\begin{array}{lll} & G_1 : G_n = 1/n\, H : n/n\, H & \\ \text{oder} & G_1 : G = 1 : n, \text{ woraus} & G_1 = 1/n\, G; \text{ u.} \\ \text{ebenso} & G_2 : G = 2 : n & G_2 = 2/n\, G \\ & G_3 : G = 3 : n & G_3 = 3/n\, G \end{array}\right\}$$

Und da nun über jeder dieser G's ein Prisma von der Höhe H/n, so folgt für die ganze n-stufige Terrassenpyramide:

$$V = (G_1 + G_2 + G_3 \,..\, G_n)\, H/n = \left(\frac{1+2+3\,..+n}{n}\right) G \cdot H/n =$$

$$\left(\frac{1+2+3\,..+n}{n^2}\right) G H; \text{ laut § 65} = \frac{\Sigma n}{n^2} \cdot G H = \frac{\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2}}{n^2}\, G H =$$

$$\left(1/2 + \frac{1}{2n}\right) G H.$$

Nun stelle man sich unter n eine ins Unendliche wachsende Zahl vor. Je vollkommener wir diese Vorstellung verwirklichen *desto mehr verschwinden aus der* **Figur** *die Stufen* und aus vorstehender *ihr entsprechender* **Formel** *das Glied 1/2n, das also, Hand in Hand mit jener Hinstrebung zum stetigen Paraboloid,* auch zum Werthe $1/2n =$ Null *hinstrebt*; was nichts anderes heißt als: für die Parabelpyramide und den Parabelkegel gilt *genau* 1) $V = 1/2 \cdot GH$ od. $G \cdot H/2$ od. „Grundfläche × halbe Scheitelhöhe.“ Zus.: Jeder parabolisch ausgebauchte Kegel (mit den Halbstärken oder Richtpunkte in der Dreiviertelshöhe) ist also = einer Walze von derselben Grundstärke und der halben Höhe.

Die gemeine oder gradseitige Pyramiden- und Kegelform (Nr. 2 in Figur S. 47). § 75.

Die Stärken verhalten sich hier wie die Entfernungen vom Scheitel, also einfach wie die Oberhöhen, die Stärkenflächen also wie die Quadrate jener. Der Viertelsgrundflächen- od. Halbgrundstärken-Punkt (unser Richtpunkt) liegt daher in der Hauptmitte. — Wiederum wie vorher denke man sich diese Form, statt wie in der Figur aus 4, so nun aus n-Stufen oder gleichhohen Prismen terrassenartig aufgebaut; dann verhalten sich, von oben an, dieser Prismen einzelne Grundflächen $G_1 : G_2 : G_3 : G_4 \,..\, G_n$ od. G wie $1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2 \,..\, n^2$; also $G_1 : G = 1^2 : n^2$ oder $G_1 = \frac{1^2}{n^2} G$; $G_2 : G = 2^2 : n^2$ oder $G_2 = \frac{2^2}{n^2} G$. Die Inhalte aller Stufen von oben an also $= G_1 \cdot H/n + G_2 \cdot H/n \,..+ G_n \cdot H/n = H/n\,[G_1 + G_2 \,..+ G]$ $= \frac{H}{n}\left[\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} \,..\, \frac{n^2}{n^2}\right] G = GH\left[\frac{1^2 + 2^2 \,..+ n^2}{n^3}\right]$, oder laut § 66 $= GH \frac{\Sigma n^2}{n^3}$ $= GH\left(\frac{1/3\, n^3 + 1/2\, n^2 + 1/6\, n}{n^3}\right) = GH\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right)$.

Wiederum nun denke man sich n ins Unendliche wachsend: dann geht das Stufenpyramid mehr und mehr in die glatte und ihre vorstehende Formel mehr und mehr in GH $(1/3 + 0 + 0)$ über. Was also die Figur Nr. 2 geometrisch ausdrückt, drückt für deren Inhalt die Formel $1/3$ GH arithmetisch aus. Demnach gemeine Pyramide oder Kegel = Prisma oder Walze von derselben Grundfläche aber mit der Drittelshöhe.

Die neil'sche (eingebauchte) Pyramiden- und Kegelform (Nr. 3 in Figur auf Seite 47). § 76.

Fragen wir zunächst nach dem Richtpunkte dieser Form, oder nach der Entfernung X des Viertelgrundflächenpunktes vom Scheitel ab, so gilt laut § 73 $G/4 : G = X^3 : H^3$ oder $\sqrt[3]{1/4} : \sqrt[3]{1} = X : H$, woraus $X = \sqrt[3]{0{,}25} \cdot H = 0{,}62996\,H$ und somit von unten an gerechnet: Richtpunktshöhe $= H - 0{,}63\,H = \mathbf{0{,}37}\,H$. Der Ort der halben Grundstärke liegt also ziemlich genau in der Mitte zwischen Haupt- und Untermitte; an welcher anschaulichen Gesetzmäßigkeit leicht zu erkennen, ob eine in Natur vorkommende eingebauchte Pyramidalform, z. B. ein Stamm, dem Neiloid nahe oder mehr u. weniger voll- oder absförmiger ist.

Um zur Kubirungsformel dieses Körpers zu kommen, denken wir uns denselben wiederum statt in 4, wie vorige Fig. Nr. 3 zeigt, in n-Schichten zerschnitten. Die Schnittflächen von oben her $= G_1$, G_2 ꝛc. müssen sich dann verhalten wie folgt: $G_1 : G = (H/n)^3 : H^3 = 1/n^3 : 1$, also $G_1 = 1/n^3\, G$; $G_2 : G = (2\,H/n)^3 : H^3$; also $G_2 = \frac{2^3}{n^3} G$; eben so $G_3 = \frac{3^3}{n^3} G$; $G_n = G = \frac{n^3}{n^3} G$.

Auf jeder Schnittfläche ein Prisma errichtet von der Höhe H/n gibt eine Neil'sche Stufenpyramide; deren Inhalt sein muß:

$$= [G_1 + G_2 \,..+ G_n]\; H/n = \left[\frac{1^3}{n^3} G + \frac{2^3}{n^3} G + ..\, \frac{n^3}{n^3}\right] H/n$$

$$= GH\left[\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 \,..+ n^3}{n^4}\right] = GH \frac{\Sigma n^3}{n^4} \text{ was laut § 67} = GH\left[\frac{1/4\, n^4 + 1/2\, n^3 + 1/4\, n^2}{n^4}\right]$$

$$= GH\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right].$$

Und wie früher erzeugt die Vorstellung eines ins Unendliche wachsenden **n** geometrisch das Neiloid, und arithmetisch die ihm genau entsprechende Regel GH $[1/4 + 0 + 0] = 1/4$ GH; = Prisma oder Walze von der gleichen Grundfläche aber mit der Viertelshöhe.

V.'s Richtpunktsregel. § 77.

(Insbesondre zur Cubirung stehender Bäume u. Waldbestände.)

Es ist von großem namentlich praktischen Interesse u. Werthe, daß, wie leicht zu erweisen, nach der Kubirungsregel

Grundfläche × $2/3$ Richtpunktshöhe

fast alle drei vorstehend behandelten Pyramiden- u. Kegel-Formen getroffen werden; nämlich Nr. 1 u. 2 ganz genau und Nr. 3 nur um $1\,1/3$ % zu gering. Denn wie die

vorstehenden Paragraphen bewiesen, lagen, wenn H die Scheitelhöhe bedeutet, die Richtpunkte bei Nr. 1 in $^3/_4$ H, Nr. 2 in $^1/_2$ H, Nr. 3 in 0,37 H. Und wenn man diese Richthöhen um ihr Drittel mindert, erhält man $^1/_2$ H, $^1/_3$ H und 0,247 H, während es für letztre Form genau 0,25 H heißen müßte. — Für die Praxis aber ist dieser Fehler meist = Null zu achten; vollends für Forsttaxation, für welche jene gemeinschaftliche Regel zur Kubirung und Schätzung stehender Bäume aller Art eine ganz vorzügliche weil eben so einfache als allgemeine und sichre Taxationstechnik begründet; eine Technik, welche, wie schon bemerkt, eben so leicht auch dem **Nichtforstmanne** zugänglich ist, und solchergestalt allen mathematischen Klassen, in Verbindung mit ihrem Meßknechte und dessen Eigenschaft als Kreis- od. Walzentafel und gleichzeitig auch als Höhenmesser, zur selbstthätigen Verknüpfung mit Natur und Leben ein interessantes Uebungsfeld für pädagogische Excursionen u. dgl. eröffnet.

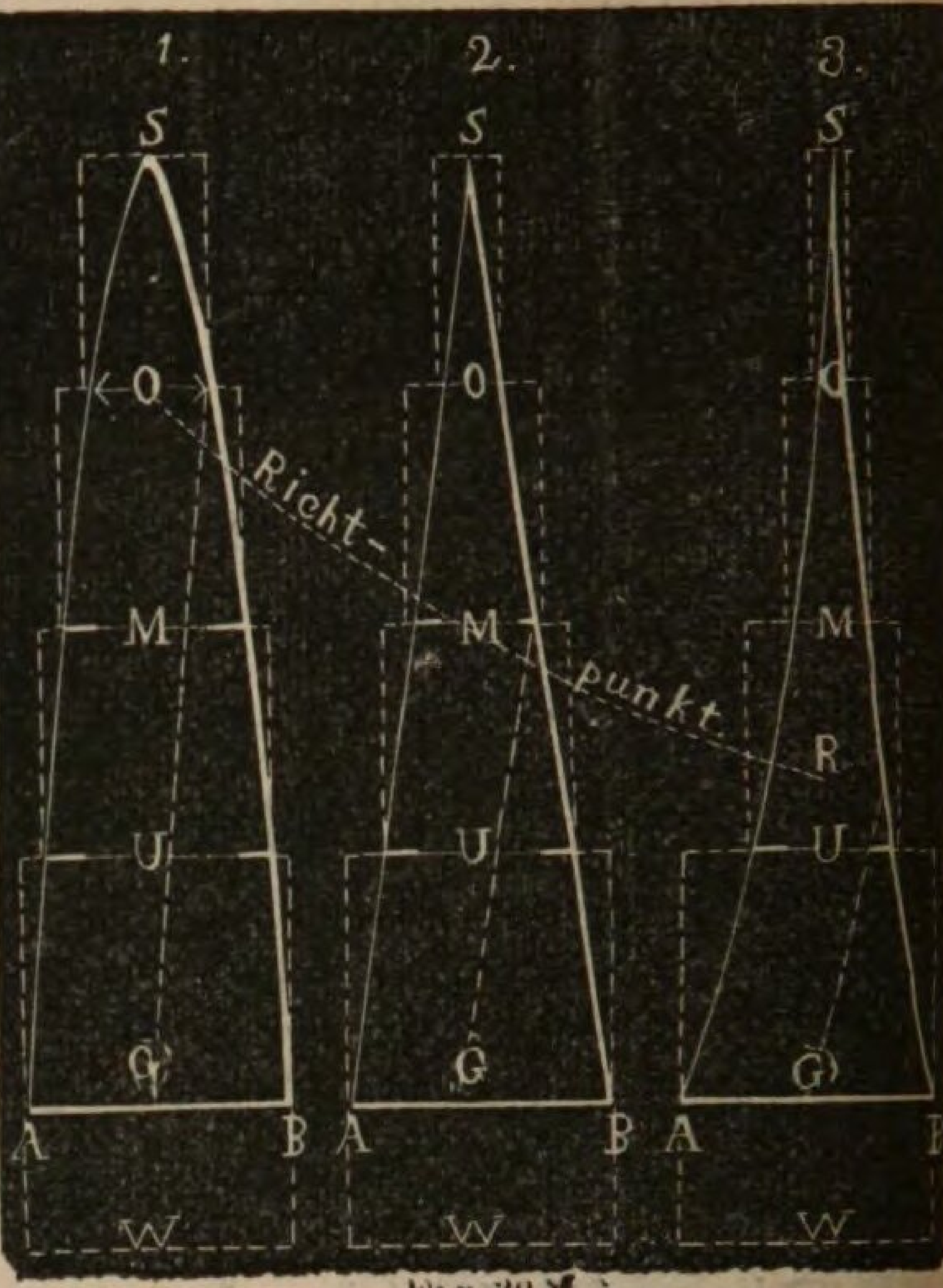


Fig. 20.

Da man aber die Grundstärken stehender Hölzer aus mehr als einem Grunde nicht wohl an ihrem tiefren Abhiebspunkte A messen kann, so bedarf jene Regel für forstliche Zwecke folgender kleinen Modifikation. Sei D u. G die in Kopfhöhe gemessene Grundstärke u. Grundfläche, u. ihre Höhe über dem Abhiebspunkte A = m. Jenachdem A mehr od. weniger tief am Boden, wird also diese Meßhöhe m = 1 bis $1^1/_2$ Meter betragen. Der Richtpunkt zu D, also der Stammstärkenpunkt $^D/_2$, liege von A ab in der Höhe r, u. das Stammstück unterhalb D od. G werde als Walze betrachtet. Dann folgt leicht aus Vorigem:

Stamminhalt S vom Abhieb bis zum Scheitel (natürlich ohne Aeste) = $G.m + G.^2/_3 (r - m) = G.^2/_3 (r + ^m/_2)$ = Grundfläche mal $^2/_3$ Höhe des um die halbe Meßhöhe der Grundstärke hinaufgeschobenen Halbgrundstärken- od. Richtpunkts; gleichviel, ob die betreffenden Stämme der ganz voll- od. mittel- od. ganz abformigen Wuchsklasse angehören.

Rechnet man Höhen u. Masse vom Abhiebspunkt an u. nennt die um die halbe Grundstärkenmeßhöhe m hinaufgeschobene Richtpunktshöhe kurzweg des Stammes Richthöhe, und hat man sich in die sehr leichte Kunst eingeübt, mittels Richtrohrs (s. F. Hülfsbuch) od. auch mit blosem Auge am stehenden Stamme die Richtpunktspartie genau genug zu erkennen: so kann man sich an der Hand seines Meßknechts nicht blos zum universellsten und compendiösesten sondern auch zugleich flottesten und relativ untrüglichsten Holzmassenschätzer ausbilden, und zwar nach folgender Regel: Miß des Stammes Grundstärke D in Schulter- od. Kopfhöhe m, bestimme von angemessener Entfernung aus die zugehörige Richthöhe (d. i. die Höhe des um $^m/_2$ hinaufgeschobenen Stärkenpunktes $^D/_2$) und rechne: die zu **D** aus dem Knechte abgelesene Kreisfläche, $\times\ ^2/_3$ der mit dem Knechte gemess. Richthöhe.

1. Zusatz. Denkt man sich den Stamm, etwa von der Mitte od. irgend einem beliebigen Punkte aus bis zum Wipfel in zwei od. drei Theile gespalten und diese Theile wieder gerundet, so erhält die Richtpunktspartie ($D/_2$ od. $G/_4$) beim zweispaltigen die durchschnittl. Stärke 0,35 od. reichl. $^1/_3$ (z. B. 0,3 + 0,4) u. beim dreispaltigen die durchschnittl. Stärke 0,29 od. knapp $^3/_{10}$. Hiernach lassen sich also auch Gabelstämme, die keinen eigentl. Richtpunkt haben, doch nach gleicher Regel kubiren; man nehme bei einfacher Gabelung die Partie der Drittelsgrundstärke u. bei doppelter Gabelung od. dreispaltn. Stämmen die der knappen Drittels- od. $^3/_{10}$-Stärke als Richtpunktspartie an!

2. Zusatz. Wegen weiterer Cultur dieses Meßknechtspraktikums, insbesondre auch wegen Einschätzung der Astmassen stehender Hölzer s. V.'s „Forstls. Hülfsbuch" sub Kapitel u. Tafel 13. —

3. Zusatz. Für parabolische od. vollholzige und gradseitige od. abholzige Stämme hatte schon Hoßfeldt eine gemeinsame für Cubirung stehender Stämme nicht ganz zu ignorirende Formel aufgestellt; lautend $G \times ^3/_4 H$, wo G die Stärkenfläche im Drittel der Totalhöhe H bedeutet.

NB. Strenge Systematiker,

welche die unmittelbare Verbindung vorstehender geometrischer Paragraphen mit der Reihenlehre mißbilligen, wollen dieselben dann in den folgenden Abschnitt verweisen.

Dritter Abschnitt.

Aus der

GEOMETRIE.

Wegen Meßknechts-Benutzung
als Masstab, Metermas u. Winkel-Transporteur siehe Kap. 10.

Vorbemerkung.

Wie rücksichts des vorigen Textes so wollen die Herren Collegen ꝛc. auch betreffs des nachfolgenden nicht übersehen, daß derselbe im wesentlichen nicht für sie, sondern mehr nur als Leitfaden für ihre Schüler und andere in der Geometrie nicht gar zu kenntnißlose Anfänger geschrieben und bestimmt ist. — Bei ihren desfallsigen geometrischen Uebungen wollen aber erstere, d. h. unsere Herren Collegen, jene Fingerzeige und combinirt arithmetisch-geometrischen Aufgaben und Arbeiten nicht unbeachtet lassen, welche in den betreff. Kapiteln (I, II, VI VII ꝛc.) der Brieftasche angedeutet sich finden. Und vergesse man unter Umständen auch nicht, daß man für jeden mit dem Knechte beobachteten Elevations- od. Depressions- od. Horizontalwinkel jedwede zugehörige trigonometrische Linie ꝛc. ohne weiteres fast bis zur Einheit der dritten Decimale u. mittels eines kurzen Umwegs über die linke Ecke bis zur Einheit der vierten, theilweis selbst bis fast zu der der fünften Decimale genau entnehmen kann; und zwar sogar für Minute zu Minute.

Kap. 5. Meßknechts combinirte Chordentafel

oder Tafel der vereinten Chorden (*Ch.*) u. Bogenhöhen (*Bh.*) in der linken Oberecke.

Nur für ganz schwache Anfänger sei vorausgeschickt: Die bei der Goniometrie u. Trigonometrie (Winkel- u. Dreieckslehre) zumeist in Anwendung kommenden griechischen Buchstaben sind und heißen: § 78.

	α	β	γ	δ	ε	φ	γ u. $\varkappa$	λ	μ	ν	π	ψ	ϱ
	alfa,	beta,	gamma,	delta,	epsilon,	fi,	gamma u. chi,	lamda,	mi,	ni,	pi,	psi,	ro
an Stelle von	a	b	c	d	e	f	g	l	m	n	p	q	r

Für gewöhnlich bedeuten dieselben die Größe des Winkels (die Weite oder Oeffnung des Winkelblatts) nach Gradmas, den Kreisquadranten od. rechten Winkel zu 90° genommen (nicht zu 100 wie ihn heut die Franzosen nehmen). Sinus α od. z. B. *sin.* 30° bedeutet also den Sinus zur Winkelweite von $\alpha°$, hier von 30 Grad od. 1/3 Quadrant. Nicht selten aber bedeuten jene griech. Buchstaben in Beziehung auf Winkel auch deren absolute Bogenlängen in ihrer natürlichen Größe d. h. für den Radius = 1. Dann hat π die specielle Bedeutung der Halbkreislänge, bekanntlich = 3,1415927 . . .; wo dann für irgend einen beliebigen Radius r die Länge des Vollkreises = 2π r = 6,2831854...r, u. die Bogenlänge pro 1° = $\pi/180$. r = 0,01745...r. ꝛc. Wenn es also heißt ∠ 1° = 0,01745, so bedeutet das soviel als *Bog.* 1° für r = 1; od. *bg.* 1°. Für den Radius 100 oder in 100facher Größe oder als Procentsatz des Radius 1 gelesen, würde man vollkommner etwa schreiben müssen:

^{100}*Bog.* 1° = 1,745 (= 100facher Bog. v. 1° = 1,745).
^{100}*Bog.* 10° = 17,45 (= 100 " " " 10° = 17,45). U. s. w.

Daß man unter Complements-Winkel denjenigen versteht, der einen andern zu 90° u. unter Supplements-Winkel den, der ihn zu 180° ergänzt, u. daß erstrer nur spitz, letztrer aber auch stumpf sein kann: dürfen wir als bekannt bei unsern Lesern wohl voraussetzen.

Chorde u. Bogenhöhe (*Ch.* od. *ch.* u. *Bh.* od. *bh.*). § 79.

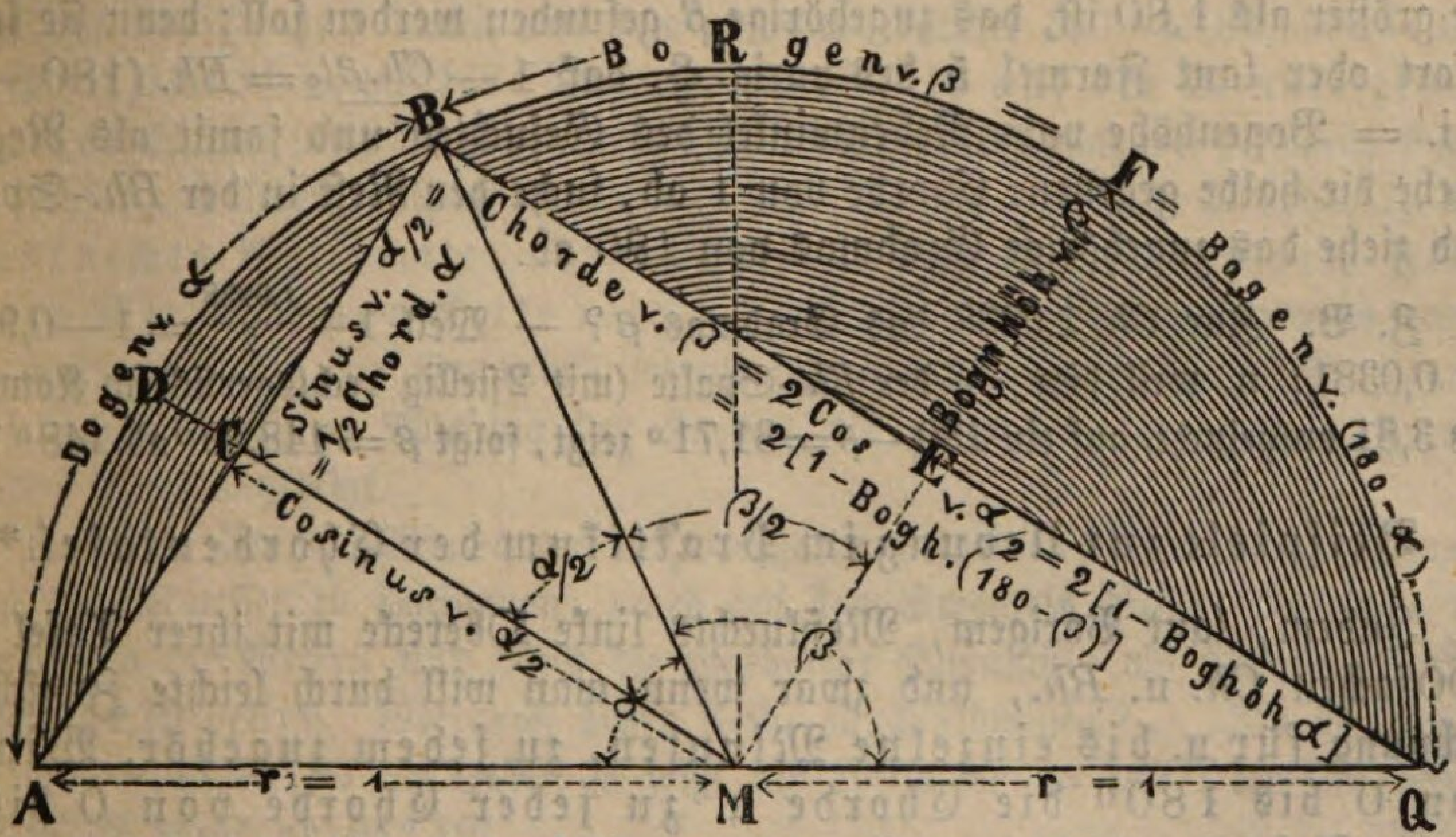


Fig. 21.

Man betrachte vorstehende Figur; α sei ein beliebiger Grundwinkel, d. h. ein spitzer od. Winkel des 1. Quadranten, d. i. zwischen 0 u. 90°; β sein Supplements- od. Nebenwinkel, also stumpf u. = 180 — α. Wie jedes Dreieck im Halbkreise, ist auch ABG bei B rechtwinkelig. Nimmt man den Radius MA = MD = MF ꝛc. als 1, so folgt leicht:

Chorde zu α od. *Ch.* α = AB; Bogenhöhe zu α od. *Bh.* α = CD; u. dann

(1) $Ch.\beta = 2\,EB = 2\,MC = 2(1 - Bh.\alpha)$; (2) $Bh.\beta = EF = 1 - ME = 1 - \frac{1}{2}Ch.\alpha$;

oder, unter β irgend welchen stumpfen Winkel verstanden, aus 1 u. 2:

(3) $Ch.\,\beta = 2\,[1 - Bh.\,(180 - \beta)]$; (4) $Bh.\,\beta = 1 - \frac{Ch.\,(180-\beta)}{2}$;

und aus 3 u. 4:

(5) $1 - \frac{1}{2}Ch.\,\beta = Bh.\,(180 - \beta)$; (6) $2\,(1 - Bh.\,\beta) = Ch.\,(180 - \beta)$.

Nun aber lassen sich aus Meßknechts linker Oberecke die Chorden und Bogenhöhen (*Ch.* u. *Bh.*) für alle Winkel von 0 bis 128° direkt ablesen und somit nach vorstehender Regel 3 u. 4 auch leicht indirekt die *Ch.* u. *Bh.* aller Winkel v. 128 bis 180°; und zwar zunächst für Halb- zu Halbzehntel-Grad oder 3 zu 3 Minuten und bei leidlich gutem Auge oder mit Glas ohne weiteres bis auf 2 Einheiten der **4.** Decimale u. somit zum Theil der **5.** Ziffer genau; u. durch einfache Zwischenrechnung dann selbst von Minute zu Minute. Die ausgeschriebenen 1-bis 3stelligen Zahlen der *Ch.*- u. *Bh.*-Spalten bedeuten zunächst Hundertel, oder gelten, als Ganze gelesen, für den Radius 100. Will man sie also für r = 1 d. i. nach ihrer „natürlichen" Größe ablesen, so hat man ihr Komma um 2 Stellen links zu rücken.

§ 80. Das Ablesen einer *Ch.* od. *Bh.* für alle Winkel v. 0 bis 128° ist hiernach selbstverständlich; ebenso das Aufsuchen eines Winkels nach Gradmas zu allen Chorden bis zur Größe 1,80 u. allen Bogenhöhen bis zur Größe 0,56. — Um aber auch ein für allemal recht schnell fertig zu sein, wenn es gilt, die *Ch.* u. *Bh.* für Winkel über 128° abzulesen, so präge man nur obstehende Figur seinem Gedächtnisse recht ein und denke sich beispielsweise $\beta = 130$, also $\alpha = 50$ Grad. Dann weiß und liest man (nach Formel 3 od. 4) ohne weiteres aus der *Ch.*- u. *Bh.*-Spalte

$Ch.\,130° = 2\,(1 - Bh.\,50) = 2\,(1 - 0{,}0937) = 2 \times 0{,}9063 = 1{,}8126$ und

$Bh.\,130° = 1 - \frac{1}{2}\,Ch.\,50 = 1 - \frac{0{,}8451}{2} = 1 - 0{,}4226 = 0{,}5774.$

Eben so schnell zeigt uns dieselbe Figur den leichten Weg, wenn zu einer *Ch.*, die größer als 1,80 ist, das zugehörige β gefunden werden soll; denn sie lehrt sofort oder laut Formel 5 des vorig. §, daß $1 - \underline{Ch.\beta}/_2 = Bh.\,(180 - \beta)$ d. i. = Bogenhöhe vom Nebenwinkel des Gesuchten und somit als Regel: Ziehe die halbe gegebene Chorde von 1 ab, suche den Rest in der *Bh.*-Spalte und ziehe das zugehörige Gradmas von 180 ab.

Z. B. Zur *Ch.* 1,9238 das Gradmas β? — Weil $1 - \frac{1{,}9238}{2} = 1 - 0{,}9619 = 0{,}0381$; u. weil dies, in der *Bh.*-Spalte (mit 2stellig rechtsgerücktem Komma) als 3,81 aufgesucht, auf ein $180 - \beta = 31{,}71°$ zeigt, folgt $\beta = 148{,}29°$ od. 148° 17'.

§ 81. Beispiele zur Uebung im Praktikum der Chordentafel.*)

Indem, laut Vorigem, Meßknechts linke Oberecke mit ihrer Tafel der 100fachen *Ch.* u. *Bh.*, und zwar wenn man will durch leichte Zwischenrechnung für u. bis einzelne Minuten, zu jedem zugehör. Winkel von 0 bis 180° die Chorde u. zu jeder Chorde von 0 bis 2 (in der Tafel 0—200) das Gradmas ablesen läßt: bildet dieselbe zugleich eine wesentliche Vervollständigung u. Verfeinerung zu den übrigen goniometrischen Tafeln des Knechts, da man bekanntlich jeden Sinus u. Cosinus

*) Wegen Anwendung dieser Chordentafel, in Verbindung mit Meßknechts Transversalmasstab, als (Winkel-) „Transporteur" d. i. zum Auftragen od. Messen der Winkel auf dem Papier, siehe Kapitel 10.

u. jede Tangente ꝛc. auf die *Ch.* zurückführen oder aus ihr ableiten kann. Man übe sich daher im flotten u. sichern Gebrauche dieser kleinen Tafel recht wacker ein; wozu die folgenden Lehrbeispiele eine kleine Einleitung zu bilden bestimmt sind und wobei zu bedenken, daß je 6 Minuten u. 3 Minuten = 1 Zehntel- resp. 1/2 Zehntel-Grad.

Bestimmung einer Chorde zu einem Winkel unter **128°**.

1. Beisp. Die 100fache *Ch.* v. 3° 33'? od. für den Rad. 100 die *Ch.* zu 3,55°? Laut $3{,}5_5$ der ∠-Skala = 6,20; die natürliche od. einfache *Ch.* also = 0,0620.

2. Beisp. Die einfache *Ch.* v. 120° 18' od. 120,3°? ... ∠-Spalte zeigt mit 120,3 auf 173½ od., schärfer abgelesen, auf 173,46; folgl. ist die gefragte *Ch.* = **1,7346**.

Bestimmung einer Chorde zu einem Winkel über **128°**.

3. Beisp. Die einfache *Ch.* zu 140° 21' od. 140,35°? ... Indem der Nebenwinkel = 39,65°, u. hierzu laut ∠-Spalte die 100fache *Bh.* = 5,9¼, also die einfache = 0,05925; u. indem diese von 1 abgezogen = 0,94075, so folgt durch × 2 .... 1,8815 = *Ch.* 140° 21'.

Bestimmung eines Winkels zur gegebenen Chorde unter 1,8 oder (für r = 100) unter 180.

4. Beisp. Das Gradmas zur *Ch.* 0,7534 bis auf die Minute genau? ... Indem zur 100fachen *Ch.* = 75,34 die ∠-Spalte 44,25° zeigt, folgt (durch 0,25 × 60) das fragl. Gradmas = 44° 15'. (So allerdings zunächst nur bis auf die Minute genau, also um 1' unsicher.) Zu 40° 16' oder, durch Division der Minuten mit 6, zu 44,267° od. 44_{27}° würde sich laut *Ch.*-Spalte die *Ch.* als 75,37 bis 75,38 ergeben; u. zu 44° 14' od. 44,233 od. 44_{23}° als 75,31: ... Beweis, daß in der That jene erste unzweifelhafte Ablesung bis auf mehr als die Minute genau war.

Bestimmung eines Winkels zur gegebenen Chorde über 1,8 od. über 180.

5. Beisp. Das Gradmas zur *Ch.* 1,9874 bis auf die Minute genau? ... Laut Fig. 21, S. 53 halbirt (= 0,9937) u. vom Radius 1 abgezogen, läßt 0,0063 als *Bh.* des Nebenwinkels. Diese 100fach, d. i. als 0,63 in der *Bh.*-Spalte aufgesucht, zeigt auf 12,87° und damit auf den gesuchten Winkel 180—12,87 = 167,13°; od. (durch 0,13 × 60) auf 167° 7,8' d. i. 167° 8' bis auf die Minute genau! (Probe od. Eingrenzung der möglichen Unsicherheit geschieht ganz wie bei vorig. Beisp.)

Zusatz. Solchergestalt lassen sich auf dem Papiere unter Mithülfe von Meßknechts Millimeter-Transversalmasstab und auf dem Felde unter Mithülfe von Kette u. dgl.: Winkel jeder Größe im Gradmas messen od. auftragen. Bei der Genauigkeitsnatur solcher Auftragungs- u. Messungsarten ist jedoch eine feinere Ablesung des Knechts bis zu mehr als einzelnen Zehntelgraden selten angezeigt.

6. Beisp. Um den Winkel, den ein Grenzstein mit seinen beiden Nachbarn macht, ohne Winkelmesser zu bestimmen, ward auf den Schenkeln dieses Winkels je eine Länge von 30 Metern und dann die zugehörige Spannung od. Chorde gemessen, welche 44,70 betrug. Wie groß dieser Feld- od. Waldwinkel? ... Da die einfache Chorde = 44,70 : 30 = 1,490, so zeigt zur 100fachen = 149,0 die *Ch.*-Spalte auf 96,32 Grad od. 96° 19'.

7. Beisp. Wenn man bei voriger Kettenmessung die betr. Chorde zu $44{,}73^m$, d. i. nur um 3 Centimeter od. einen reichlichen Zoll zu groß maß, welchen Einfluß hat dies auf das gefragte Resultat χ? ... Indem sich dann die einfache *Ch.* = 44,73 : 30 = 1,491 u. somit $^{100}Ch.\ \chi$ zu 149,1 gestaltet, gibt hierzu Meßknechts linke Ecke das Gradmas χ = 96,4° od. 96° 24'. — Jener kleine Messungsfehler von nur 3 Cent würde also hier einen Winkelfehler von 5 Minuten zur Folge haben.

Kap. 6. Meßknechts übrige goniometrische od. trigonometr. Tafeln.
(Sinus- u. Cosinus-, Tangenten- u. Sekantentafel.)

§ 82. Die trigonometr. Grundlinien u. deren Meßknechtsskalen.

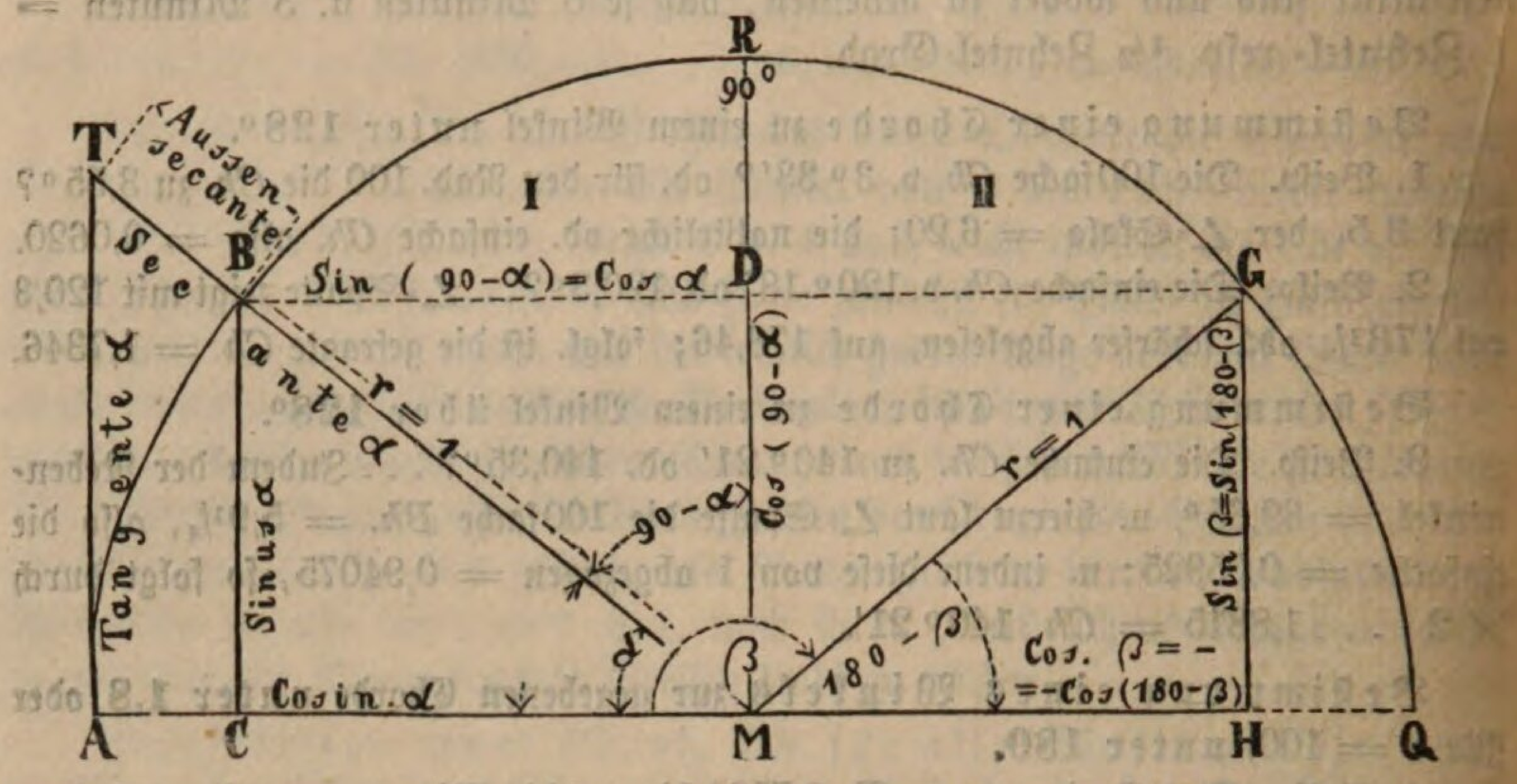


Fig. 22.

Besser als das Wort, weil anschaulicher u. bleibender, bringt eine genaue Betrachtung vorstehender Figur unsern Anfängern in Erinnerung, wie die betreffenden Linien sich zu einander und in Beziehung zu dem als Einheit genommenen Radius MA = MB = MR = **r** = **1** verhalten, u. zwar

a) zunächst für den **I.** Quadranten od. für alle Grundwinkel (α) von A bis R od. 0 bis 90°:

Der Sinus (arab. Stütze) BC, = *sin.* α; die Tangente (Berührende) AT, = *tg.* α; die Sekante (Durchschneidende) MT, = *sec.* α; u. der Complementswinkel-Sinus BD, = Cosinus MC, = *cos.* α = *sin.* $(90-\alpha)$. Nicht angegeben in der Figur ist die von R ab parallel zu DB gehende Tangente von $90-\alpha$ d. i. die Cotangente des Grundwinkels α = *cot.* α u. die entspr. Sekante des Complementswinkels $90-\alpha$ = *cosec.* α. Nur in Erinnerung sei noch gebracht, inwiefern beim Wachsen des Winkels α v. 0 bis 90° od. v. A bis R der Sinus mit wächst u. zwar von 0 bis zu seinem Maximum MR = 1 = „Sinustotus" od. Radius; während Tangente u. Sekante, gleichfalls, aber schließlich in viel stärkerem Grade mitwachsend, sich für α = 90 od. = R ins Unendliche verlieren; *tg.* 90° = *sec.* 90° = ∞. — Der Cosinus von α dagegen wird beim Wachsen des α von 0 bis 90 immer kleiner u. schließlich Null. — So z. B. ist *cos.* 89° = *sin.* 1° = 0,017452; *cos.* 90° = *sin.* 0° = Null; *cotg.* 89° = *tg.* 1° = 0,017455; *cotg.* 90° = *tg.* 0° = Null; *cosec.* 89° = *sec.* 1° = 1,000153 (s. S. 62); *cosec.* 90° = *sec.* 0° = 1.

b) Für den **II.** Quadranten od. beim Uebergange des spitzen Winkels in den stumpfen Winkel β od. für Winkel über 90° lehrt dann dieselbe Figur, zunächst wenigstens für den Sinus u. Cosinus, daß der Sinus von 90° bis 180° wieder abnimmt von seinem Totalwerthe 1 bis Null, u. daß der Sinus jedes stumpfen Winkels β ganz gleich dem Sinus seines (spitzen) Nebenwinkels, daß also 2 Supplementswinkel einen u. denselben Sinus haben. — Dagegen muß der Cosinus, als durch den Nullpunkt gegangen u. mit entgegengesetzter Lage u. entgegengesetzter Größeänderung wiedererscheinend, logischer Weise als ein dem vorigen entgegengesetzter d. i. als ein negativer betrachtet werden. Der Cosinus jedes stumpfen Winkels oder jedes Winkels zwischen 90 u. 180° ist also an Größe dem seines Nebenwinkels zwar gleich, aber negativ; demnach *cos.* 120° = — *cos.* 60°; *cos.* 180° od. *cos.* π = — 1. Wenn nun, wie aus den rechtwinkligen u. ähnlichen Dreiecken obiger Figur leicht abzuleiten, *tg.* $\alpha = \frac{sin.\,\alpha}{cos.\,\alpha}$ u. *sec.* $\alpha = \frac{1}{cos.\,\alpha}$ u. somit *tg.* $90° = \frac{1}{0} = \infty$; *sec.* $90° = \frac{1}{0} = \infty$, so muß man, da beim Weitergang über 90° hinaus zum stumpfen Winkel β hin, der Nenner (*cos.* β) negativ wird, auch die Tangente u. Sekante jedes stumpfen Winkels als negativ geworden sich

vorstellen; als ins Unendliche verloren u. entgegengesetzt wiederkommend. Sonach z. B. $tg.\,91^\circ = \frac{sin.\,91^\circ}{cos.\,91^\circ} = \frac{+sin.89^\circ}{-cos.89^\circ} = \frac{0{,}99985}{-0{,}175} = -57{,}29$. Und somit: $sin.91^\circ = sin.\,89^\circ$; $cos.91^\circ = -cos.\,89$; $tg.\,91^\circ = -tg.89$; $sec.91^\circ = -sec.89$; ꝛc.

Endlich ist noch zu erinnern, daß man das zwischen einem Bogen AB u. seinem Sinus BC liegende Stück AC, das somit den Cosinus zu 1 ergänzt, wenig passend den *Sinus versus* zu nennen pflegt, wonach also $AC = sinv.\,\alpha$ und $DR = sinv.\,(90-\alpha) = cosv.\,\alpha$; sowie daß, wie ein Blick auf die beiden Figuren § 79 u. 82 ersehen läßt, zwischen Sinus, Cosinus u. *Sinus versus* einerseits u. Chorde u. Bogenhöhe andrerseits folgende Gesetze stattfinden:

$ch.\,\alpha = 2\,sin.\,\frac{1}{2}\,\alpha$, od. $ch.\,2\,\alpha = 2\,sin.\,\alpha$ u. folgl. $sin.\,\alpha = \frac{1}{2}\,ch.\,2\,\alpha$, also auch $sin.\,(90-\alpha)$ od. $cos.\,\alpha = \frac{1}{2}\,ch.\,(180-2\,\alpha)$,

$bh.\,\alpha = sinv.\,\frac{1}{2}\,\alpha = 1 - cos.\,\frac{1}{2}\,\alpha$, od. $bh.\,2\,\alpha = sinv.\,\alpha = 1 - cos.\,\alpha$; u. folglich $cos.\,\alpha = 1 - bh.\,2\,\alpha$, also auch $cos.\,(90-\alpha)$ od. $sin.\,\alpha = 1 - bh.\,(180-2\,\alpha)$.

Fügt man demgemäs zu jenen 6 Formeln des § 79 annoch die folgenden zwei:

(7) $sin.\,\alpha = \frac{1}{2}\,ch.\,2\,\alpha$ od. $= 1 - bh.\,(180-2\,\alpha)$, d. i. = halbe Chorde des Doppelwinkels oder = 1 minus Bogenhöhe von dessen Supplement, und

(8) $cos.\,\alpha = 1 - bh.\,2\,\alpha$ od. $= \frac{1}{2}\,ch.\,(180-2\,\alpha)$, d. i = 1 minus Bogenhöhe des Doppelwinkels oder = halbe Chorde von dessen Supplement,

und denkt man dabei an die Flottheit u. Feinheit, mit der wir letztre Werthe aus Meßknechts combinirter Chordentafel (§ 81) ablesen konnten, u. ferner daran, daß, wie hier der *Sin.* u. *Cos.*, so jedwede andre trigonometr. Linie auf die *Ch.* u. *Bh.* des Doppelwinkels oder seines Supplements zurückgeführt werden kann: so wird man leicht begreifen, inwiefern jene *Ch.*- u. *Bh.*-Tafel eigentlich ebenfalls mit zu den trigono- (richtiger gonio-)metrischen zu rechnen ist und für die feinere desfallsige Praxis eine wesentliche Ergänzung bildet zu den vier weniger feinen aber eigentlichen trigonometrischen Meßknechts-Skalen am runden Rande; links: für Sinus u. Bogenlänge (*sin.* α u. *bg.* α), rechts: für Tangente, Cosinus u. Sekante.

Die goniometrischen Meßknechtsskalen insbesondre und deren ordinärer Gebrauch. § 83.

Bei Ablesung der nurgedachten, an den Kreisrand des Knechts sich anschließenden (links) Sinus- u. Bogen-, (rechts) Tangenten-, Cosinus- u. Sekanten-Skalen bleibe man behufs sichrer und flotter Arbeit eingedenk: 1. daß die fettere Skala, ähnlich wie bei der *Ch.*- u. *Bh.*-Tafel, das Gradmas bedeutet; 2. daß die anderen, als Ganze abgelesen, die fragln. Linien in 100facher Größe od. für den Radius r = 100 darstellen; u. 3. daß man also die ausgeschriebenen Ziffern dieser Skalen, um sie für r = 1 d. i. in ihrem Naturwerthe zu haben, als Hundertel od. mit 2stellig links befindlichem Comma lesen muß, und endlich 4. beim Cosinus nicht vergesse, daß dieser dem Gradmase entgegengesetzt wächst.

Beispiele von Ablesungen bei gröberer Praxis; (vgl. hiermit die Gegenproben der feinern in § 86—89.) Wo nichts andres bemerkt ist: immer im Natur- od. Einheitswerthe d. i. für den Radius r = 1; und nicht zu vergessen, daß die letzte Ziffer nothwendig um eine bis wohl auch 2 Einheiten unsicher sein muß.

1. Sinustafel. (Linker Rand.) $sin.40^\circ? =$ **0,643**. — $sin.40{,}2^\circ? =$ **0,645** reichl., also vielleicht **0,6455**. — $sin.\,40^\circ\,22'$? od. durch Division der Min. mit 6, $sin.\,40{,}37^\circ$? also $sin.\,40{,}4^\circ$ knapp? = **0,648** knapp od. **0,6475**

2. Bogentafel. (Linker Rand.) Gegen sämmtliche vorige Sinusse sollen die entsprechenden Bogenlängen verglichen werden. Also $bg.\,40^\circ$? . . . Laut innerer Skala = 0,70 knapp; od. feiner = **0,698**. — $bg.\,40{,}2^\circ? =$ **0,702**; $bg.\,40^\circ\,22'$?

od. *bg.* v. 40,37° d. i. v. *bg.* 40,4° knapp? = 0,704 bis 0,705 also wahrscheinl. **0,7045**. Aus welchen 3 Ablesungen folgt, daß bei fraglr. Winkelöffnung der Bogen gegenüber dem Sinus um 0,056 od. ca. 5½ Procent des Radius größer ist.

3. Tangententafel. (Rechter Rand. Außen-Skala. Pendelablesung bei Baum- u. ähnlichen Höhenmessungen.) — Für die vorigen 3 Winkel — 40°; 40,2° u. 40° 22′ — die Tangenten abzulesen u. gegen die ihnen gleichlaufenden Sinusgrößen zu vergleichen. — *tg.* 40°? = **0,840**. — *tg.* 40,2°? = **0,845**; *tg.* 40° 22′ od. 40,37° od. 40,4° knapp? = **0,850**. (Die Tangenten sind hier also um reichl. 20 Procent des Radius größer als der Sinus.)

4. Cosinustafel. (Rechter Rand, innere Skala.) — Die Cosinusse der vorigen Winkel 40°, 40,2° u. 40° 22′? — *cos.* 40° zeigt auf **0,766**; *cos.* 40,2° auf **0,764** u. *cos.* 40° 22′ od. 40,4° = **0,762**. (Zur Controle hierzu können die Sinus der Complementswinkel aus der Sinustafel dienen; so z. B. zeigt *sin.* 50° ebenfalls entschieden auf 0,766.)

5. Sekantentafel. (Rechter Rand, innerste Skala. Zugleich Reciproke der Cosinuswerthe.) — Wenn das Pendel bei einer Höhen- od. Tiefenvisur auf netto 40° und dann auf 40,2° einspielt, so spielt es gleichzeitig auf welche Sekante? Durch Hinüberleitung des Blicks mittels der Cosinus-Skala wird man lesen ziemlich unzweifelhaft *sec.* 40° = **1,305** u. *sec.* 40,2° ca. **1,308**.

§ 84. **Beispiele aus der Rektangular-Trigonometrie; zur weiteren Erläuterung des Vorigen.**

Bei der mannigfaltigen Anwendbarkeit der im vorstehenden § betrachteten Skalen verlohnt es sich gar sehr, in deren flotten Gebrauch sich recht einzuüben. Lassen sich doch mit ihrer Hülfe eine Masse geodätischer Fragen, ohne alle weitere mathematische Gelehrsamkeit u. Apparate, sofort erledigen, besonders solche, die sich auf's rechtwinkelige △ zurückführen lassen. In so weit es sich nämlich hierbei darum handelt, aus zwei Elementen ein drittes, d. i. eine Seite oder einen Winkel zu finden, u. insoweit dabei nicht der Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ zur Anwendung zu kommen hat, weil es sich um trigonometrische d. i. um Beziehungen zwischen Seiten u. Winkeln handelt: braucht man sich dazu eigentlich weiter nichts zu merken, als die allgemeine Regel: Nimm die eine der in Betracht kommenden Seiten als Radius u. die andere dann als die entspr. trigon. Linie des betreff. Winkels u. setze diese Betrachtung in Form einer Gleichung auf. Wobei nur noch zu beachten, daß *sin.* α, *cos.* α, *tg.* α ꝛc. den zum Radius 1 gehörigen Tafelwerth des fragln. Sinus ꝛc. bedeutet u. daß für einen andern Radius von der beliebigen Größe r die diesem entsprechende Sinuslinie ꝛc. auch das r-fache des Tafelwerths ist; also = r *sin.* α, r *cos.* α, r *tg.* α ꝛc.

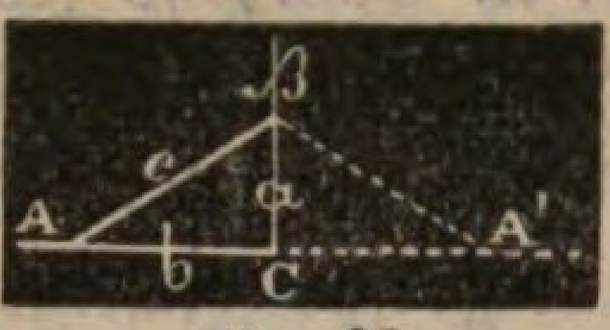


Fig. 23.

1. Beisp. Die horizontale Standferne des Auges vom Stamme od. CE = e sei = 30 Meter. Es sei nun v. C aus durch bloses Visiren zu messen die Oberhöhe ES des Scheitelpnkts. u. ER des Richtpnkts. (§77) u. der Unterhöhe EW des Wurzelhalses oder tiefstem Abhiebspunktes. Indem wir nun CE = 30 als Radius betrachten, ist ES nichts anders als die 30-fache Tangente des Wnkls. ECS u. eben so ER u. EW die 30fache Tangente des betreff. Höhen- u. Tiefenwinkels. Indem aber des Knechtes Pendelfaden diese Höhen- u. Tiefentangenten an der äußersten Skala gleich direkt gibt, folgt:

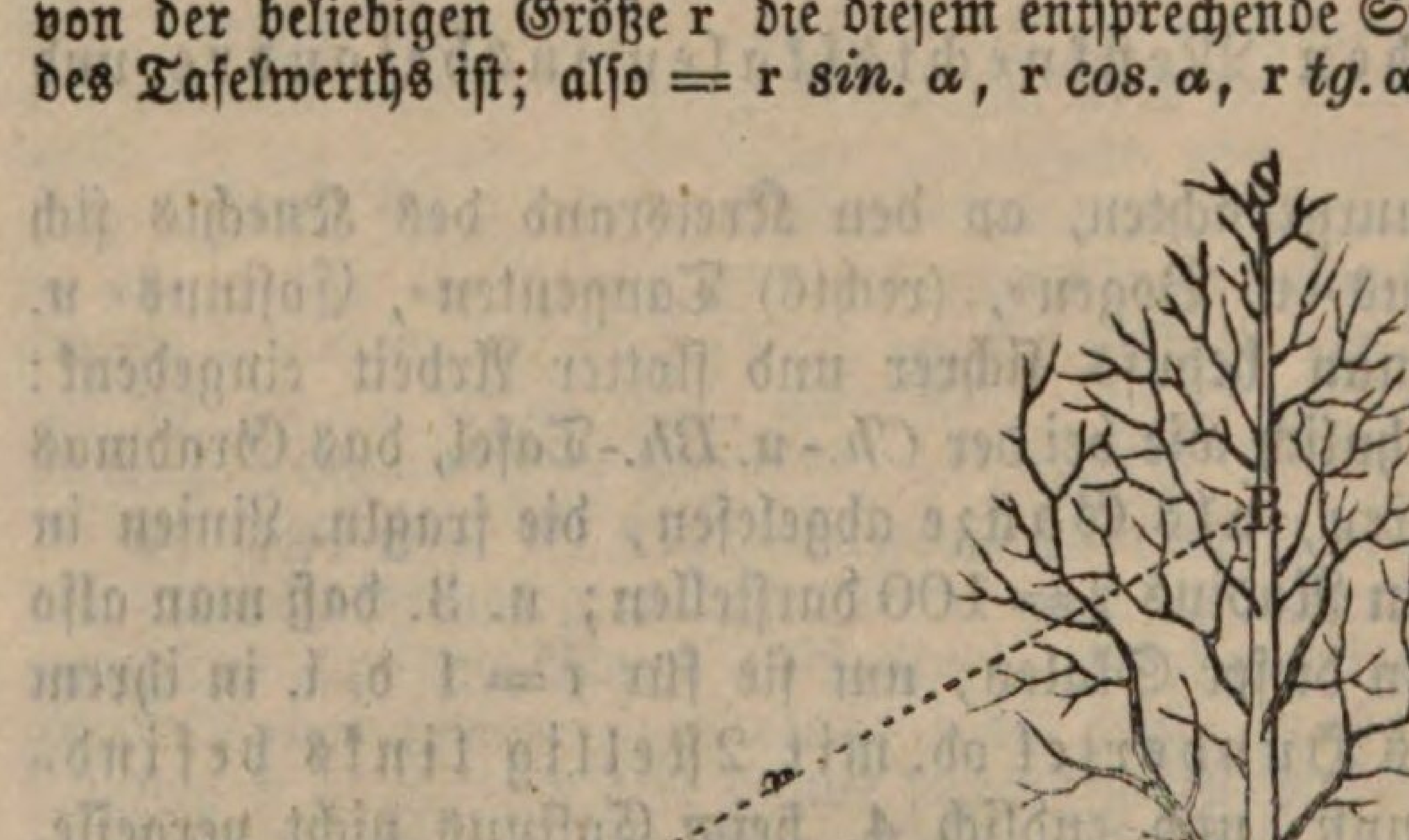


Fig. 24.

$\left.\begin{array}{l}\text{Baumhöhe } WS = ES + EW\\ \text{Richtpktsh. } WR = ER + EW\end{array}\right\} =$ (Betreff. Höhentangente + Tiefentangente) $\times$ e.

Da hierbei ein Irrthum um das Zehnfache unmöglich, liest u. schreibt man alles in ganzen Zahlen. Z. B. Höhentang. = 42, Tiefentang. = 12, folgl. (bei 30^m Standferne) Höhe = (42 + 12).30 od. 54 . 3 = 162 d. h. 16,2 Meter.

2. Beisp. Bei voriger Baummessung konnte nicht wohl die Horizontale e, sondern mußte die Schiefe w gemessen werden. Da man aber zu voriger Rechnung e braucht, so denkt man sich w als Radius, dann ist aber e nichts andres als der w-fache Cosinus des betr. Tiefenwinkels. Vorige Regel geht also dann einfach über in Höhe WR u. WS = (Höhentang. + Tiefentang.) $\times$ w $\times$ *Cosin.* der Depression von w. Indem aber das Meßknechtspendel mit Einem Blick Tiefentangente u. Tiefencosinus direkt zeigt, wird diese Praxis noch einfacher, wenn man statt des 100fach. Cosinus dessen Differenz gegen 100 abliest u. das Produkt (Höhentang. + Tiefentang.) $\times$ w um eben so viel Procente vermindert. — Z. B. In vorigem Falle mit 16,2 M. Höhe möge die Standferne 30 nicht das e sondern das w gewesen sein, für welches das Pendel gleichzeitig also mit der *Tang.* = 12 auch den *Cos.* = 98 angeben mußte; d. h. 2% unter 100. Das heißt: das Produkt 16,2 ist noch um 2% zu kürzen; $\begin{array}{r}16,2\\ \times 2\,.\,.\,-324\end{array} =$ 15,9 Meter.

3. Beisp. Wenn auf dem, gleichviel ob geraden od. geschlängelten Wege von F nach G ein Bergsteiger mit seinem Meßknechte eine mittlere Steigung von 18°

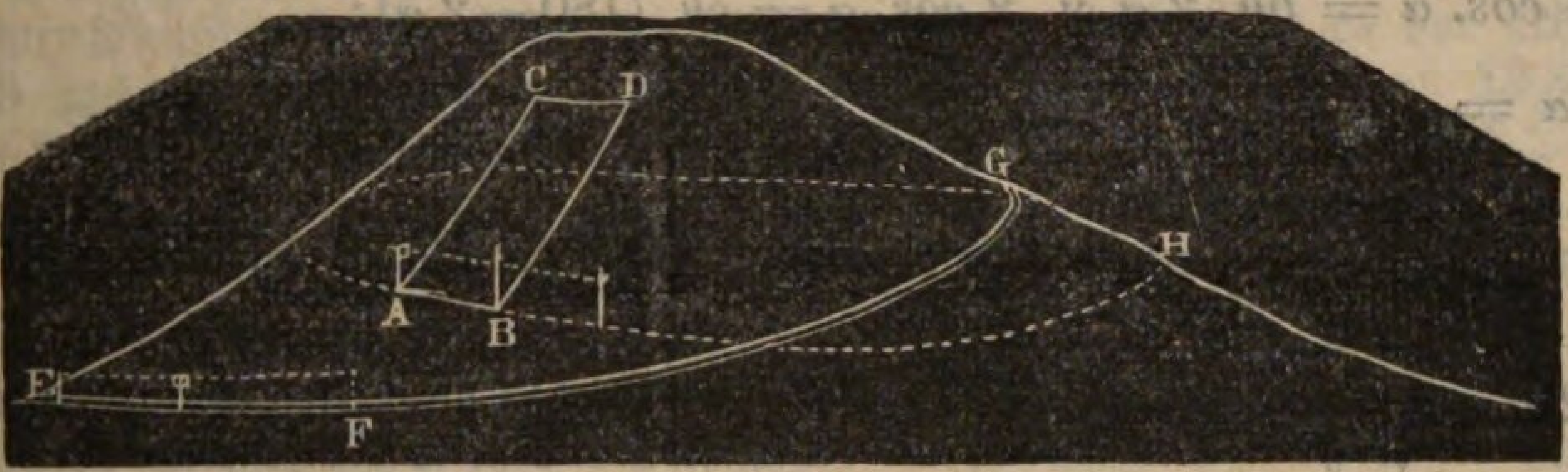


Fig. 25.

beobachtet u. dabei p. Minute 45 Schritte à $^2/_3$ Meter macht, wieviel Höhe bringt derselbe per Minute unter sich? Antw.: Ein Minutenstück von FG, = 45 . $^2/_3$ = 30 Meter, als Radius betrachtet, so ist die fragl. Höhe nichts andres als der 30fache Sinus von 18° u. somit laut Knecht = 0,31 $\times$ 30 = 9,3 Meter.

4. Beisp. AD sei eine Probefläche v. 100 Ar od. = 1 Hektare wirklicher od. schiefer Größe. Ihren Neigungswinkel habe der Meßknecht zu 32° konstatirt. Wie groß hiernach die Horizontal- od. Kartengröße? . . . Die Schiefe AC als Radius gedacht, ist die reduzirte od. horizontale nichts anderes als der 100fache *cos.* 32°; den auch ohne Winkelablesung das Loth des Knechts direkt angab als 84,8 Ar.

5. Beisp. An gleichem Orte soll eine Probefläche abgesteckt werden, deren Horizontalgröße = 100 Ar betragen soll. Wie groß muß da bei 32° Böschung die wirkliche eingerichtet werden? Die Horizontale 100 als Radius genommen, so wird die Schiefe die Sekante v. 32°, die das Pendel ebenfalls gleich mit, und zwar als 118 Ar anzeigte.

Trigonometrische Grundformeln. § 85.

Für die weitere und namentlich auch feinere Praxis merke man sich nun zu Vorigem noch folgende Formeln des betreffenden Brieftaschen-Kapitels, die sich aus Fig. 1 u. 2 und ähnlichen mittels der elementarsten Sätze der Dreiecks- u. Kreislehre begründen lassen; wie aus jedem desfallsigen Lehrbuche, wenigstens betreffs der Formeln 1—14, zu ersehen. — Wo der Winkelbuchstabe fehlt, denke man sich (das beliebige) α hinzu; u. ist demnach $sin.^2$ soviel als $(sin.\ \alpha)^2$ od. $sin.^2\ \alpha$.

(1) $cos.\ \alpha = sin.(90 - \alpha)$; $sin.^2 + cos.^2 = 1$; $sin. = \sqrt{1 - cos.^2}$ u. $cos. = \sqrt{1 - sin.^2}$;

(2) $tg. = \frac{sin.}{cos.} = \frac{sin.}{\sqrt{1 - sin.^2}} = \sqrt{sec.^2 - 1}$;

(3) $cotg.\ \alpha = tg.(90 - \alpha) = \frac{1}{tg.\ \alpha}$; also immer = Reciproke der *tg.*

(4) $sec. = \frac{1}{cosin.} = \frac{1}{\sqrt{1-sin.^2}} = \sqrt{1+tg.^2}$; also immer Reciproke des *Cosin.*;

(5) $cosec.\ \alpha = sec.\ (90-\alpha) = \frac{1}{sin.\ \alpha} = \sqrt{1+cot.^2}$; also Reciproke des Sinus.

(6) $sin.(\alpha \pm \beta) = sin.\alpha\ cos.\beta \pm sin.\beta\ cos.\alpha$;

(7) $cos.(\alpha \pm \beta) = cos.\alpha\ cos.\beta \mp sin.\alpha\ sin.\beta$;

(8) $tg.\ (\alpha \pm \beta) = \frac{tg.\ \alpha \pm tg.\ \beta}{1 \mp tg.\ \alpha\ tg.\ \beta}$.

(9) $sin.\ {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{1-cos.\ \alpha}{2}}$;

(10) $cos.\ {}^1/_2\,\alpha = \sqrt{\frac{1+cos.\ \alpha}{2}}$;

(11) $\begin{cases} sin.\ 2\,\alpha = sin.\ \alpha\ cos.\ \alpha \\ sin.\ \alpha = sin.\ {}^1/_2\,\alpha\ cos.\ {}^1/_2\,\alpha \end{cases}$; (12) $\begin{cases} cos.\,2\,\alpha = 1-2\,sin.^2\alpha = 2\,cos.^2\alpha - 1 \\ cos.^2\,\alpha = (1+cos.\,2\,\alpha):2 \end{cases}$;

(13) $\begin{cases} sin.\ 3\,\alpha = 3\ sin.\alpha - 4\ sin.^3\,\alpha \\ sin.^3\alpha = (3 sin.\,\alpha - sin.\,3\,\alpha):4 \end{cases}$; (14) $\begin{cases} cos.\,3\,\alpha = 4\ cos.^3\alpha - 3\,cos.\,\alpha \\ cos.\,3\,\alpha = (3\ cos.\,\alpha + cos.\,3\,\alpha):4 \end{cases}$.

Und hierzu mit Bezug auf die Tafel der Chorden u. Bogenhöhen *ch.* u. *bh.*:

(15) $ch.\ \alpha = 2\,[1-bh.\ (180-2\,\alpha)]$ u. auch $= 2\ sin.\ {}^1/_2\,\alpha$; $bh.\ \alpha = 1 - cos.\ {}^1/_2\alpha$;

(16) $sin.\ \alpha = {}^1/_2\ ch.\ 2\,\alpha$ u. auch $= 1-bh.\ (180-2\,\alpha)$;
$2\ sin.\ \alpha = ch.\,2\ \alpha$ u. $1-sin.\ \alpha = bh.\ (180-2\,\alpha)$;

(17) $cos.\ \alpha = 1-bh.\ 2\,\alpha$ u. auch $= {}^1/_2\ ch.\ (180-2\,\alpha)$;
$1-cos.\ \alpha = bh.\ 2\ \alpha$ u. $2\ cos.\ \alpha = ch.\ (180-2\,\alpha)$;

(18) $tg.\ \alpha = \frac{ch.\ 2\,\alpha}{ch.(180-2\,\alpha}$ od. $\frac{{}^1/_2\,ch.\ 2\,\alpha}{1-bh.\,2\,\alpha}$ od. $\frac{1-bh.(180-2\,\alpha)}{{}^1/_2\ ch.\ (180-2\,\alpha)}$;

(19) $1-\sqrt{\frac{1}{1+tg.^2\alpha}} = bh.\ 2\,\alpha$ od., wenn dabei die *Bh.*-Tafel überschritten wird,
$2\sqrt{\frac{1}{1+tg.^2\alpha}} = ch.\ (180-2\,\alpha) = Ch.$ des doppelten Complements v. α.

Die Formeln 16 bis 19 dienen als Fingerzeige, wie man mittels Meßknechts combinirter Chordentafel, wenn es Noth thut, zu gegebenem Gradmas die genaueren Sinus, Cosinus, Tangenten 2c. findet oder aber zu gegebenen Sinus, Cosinus, Tangenten 2c. das genauere Gradmas. — Bei der Kritik der folgenden Beispiele: nicht zu vergessen, daß die letzte Ziffer stets um eine u. unter Umständen auch einige Einheiten unsicher sein muß.

§ 86. Der Knecht als vollkommenere **Sinus-Tafel**; oder Beispiele unter Mitanwendung der Formel 16. (Zur Ergänzung von § 83, 1.)

1. Der Sinus v. **5°**?... Ordinär aus link. Rande = 0,09 knapp, wahrscheinl. 0,088. Genauer als ${}^1/_2$ *ch.* 10° aus linker Ecke = ${}^1/_2$. 0,1743 = **0,08715**.

2. Der Sinus des stumpfen Winkels **130°**?... = *sin.* des Nebenwinkels; = *sin.* 50°. Ordinär aus *Sin.*-Tafel = 0,767. Genauer aus *Ch.*-Tafel als ${}^1/_2$ *ch.* 100° = ${}^1/_2$. 1,5321 = **0,76605**.

3. Die Sinusse des § **83** d. i. v. 40 u. 40,2° u. 40° 22′ genauer als dort, also aus der *Ch.*-Tafel abzulesen! — *sin.* 40° = ${}^1/_2$ *ch.* 80° = ${}^1/_2$. 1,2856 = **0,6428**; *sin.* 40,2° = ${}^1/_2$. *ch.* 80,4° = ${}^1/_2$. 1,2909 = **0,64545**; *sin.* 40° 22′ = ${}^1/_2$ *ch.* 80° 44′ od. 80,7${}^1/_3$ = ${}^1/_2$. 1,2954 = **0,6477**. — Letzteres etwas sichrer auch so:

$\left.\begin{matrix} ch.\ 80{,}8 = 1{,}2962 \\ ch.\ 80{,}7 = 1{,}2949 \end{matrix}\right\}$ also Diff. pro $\begin{matrix} 6' = 13 \\ 2' = \ \ 433 \end{matrix}$; also *ch.* 80° 44′ = $\begin{matrix} 1{,}2949 \\ \ \ \ \ 433 \\ \hline 1{,}295333 \end{matrix}$

also *sin.* 40° 22′ = **0,64767**.

4. Den Sinus v. **80° 1′**?... Ordinär aus *Sin.*-Tafel = **0,985**. Aus der *Ch.*-Tafel, u. zwar laut Formel 16 als *sin.* 80° 1′ = 1 — *bh.* (180° — 160° 2′) = 1 — *bh.* 19° 58′ = 1 — 0,01504 = 0,98496. — Und *sin.* 80,017°? = 1 — *bh.* (180 — 166,034) = 1 — *bh.* 19,966° = 1 — 0,01513 = **0,98487**.

5. Zum Sinus **0,5674** das zugehörige Gradmas α?... Ordinär mittels *Sin.*-Tafel = 34,6°. Genauer als Chorde 0,5674 . 2 = 1,1348, welche als 113_{48} in *Ch.*-Tafel aufgesucht, zeigt auf $2\,\alpha$ = 69,13°; also α = 34,56° od. **34° 34′**.

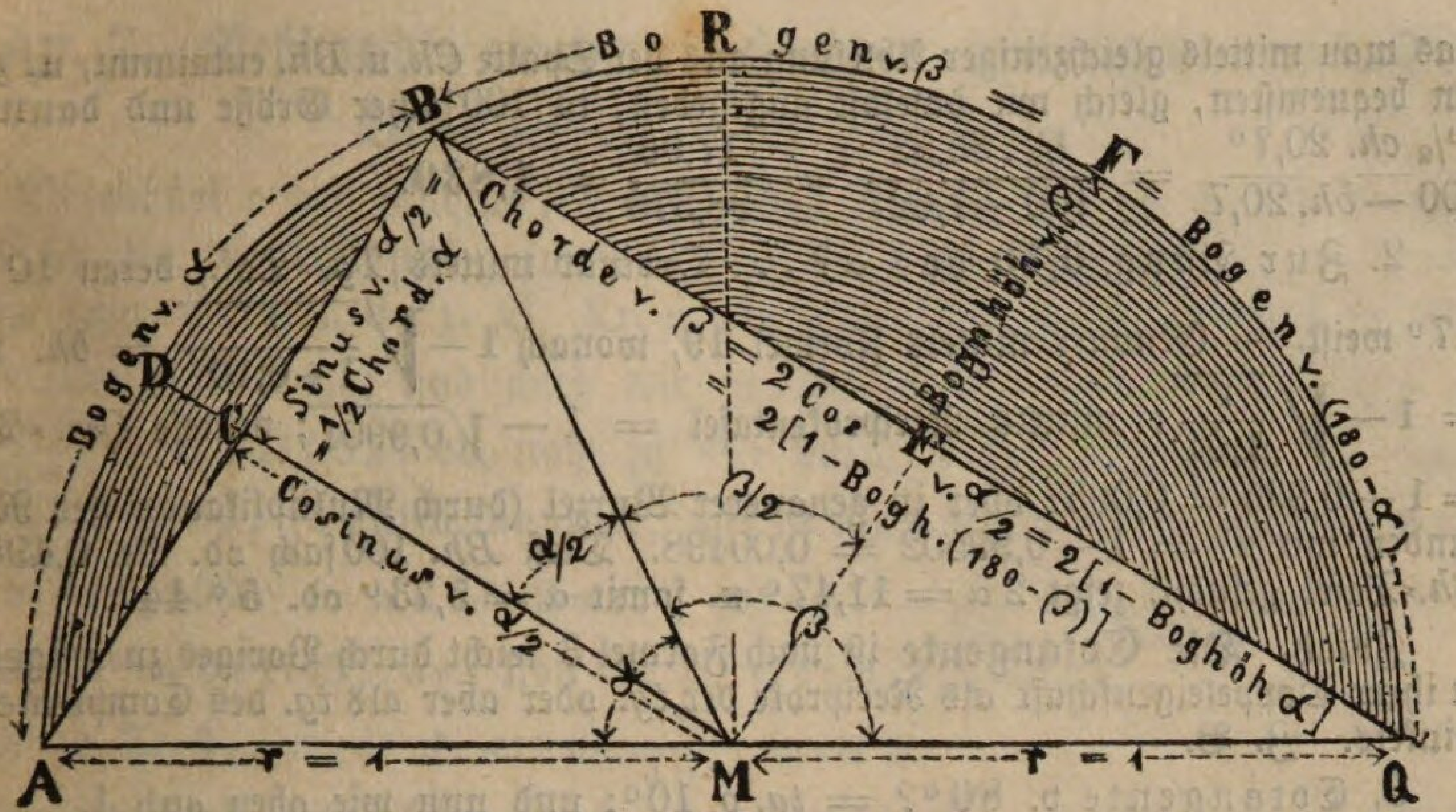


Fig. 26.

6. Zum Sinus **0,9731** das Gradmas α? . . . Ordinär mit *Sin.*-Tafel $\alpha = 76,6^{\circ}$. — Genauer: . . . Weil das Doppelte die *Ch.*-Tafel überschreitet, denke man an die Formel 16 od. an die vorstehende bekannte Figur v. S. 53, wonach der von 1 abgezogene Sinus v. $x^{\circ} = EB = MC$ die Bogenhöhe CG seines doppelten Complementswinkels gibt. Demnach $1 - 0,9731 = 0,0269$ in der *Bh.*-Spalte als 2,69 aufgesucht, deutet auf 26,65; also einfaches Compl. $= 13,325$; und gesuchter Winkel $= 90^{\circ} - 13,325 = 76,675^{\circ}$ od. $76^{\circ}\,40'$ bis **76° 41′**.

Zusatz. Nachdem aus vorstehenden **6** Beispielen zur Genüge zu ersehen, daß u. wie man mit seinem Ingenieur-Meßknechte, zunächst beim Sinus u. dann ähnlich auch bei den andern trigonometrischen Linien, bis auf die einzelne Minute arbeiten kann: so sollen nun im Intresse leichtern Studiums rc. alle folgenden Beispiele in möglichst kurzen Zahlen gehalten werden.

Der Knecht als vollkommenere **Cosinus-Tafel**; oder Lehrbeispiele unter Mitanwendung der Formel 17. (Zur Ergänzung v. § 83, 4.) § 87.
Da der Cosinus eines Winkels α nichts andres ist als der Sinus seines Complements $90 - \alpha$, so folgt:

1. Zunächst im indirekten Wege: Ist α gegeben u. der *Cos.* gefragt, so suche nach vorig. § den Sinus zu $90 - \alpha$. — Und ist der *Cos.* gegeben u. α gesucht, so betrachte jenen als Sinus, suche dazu den Winkel u. ziehe diesen von 90 ab.

2. Direkt aber: Mittels der *Cos.*-Skala des rechten Randes; u. genauer mittels *Ch.*-Tafel lt. Formel 17 od. lt. obiger Figur u. ganz analog den vorigen Beispielen.

Zur direkten Praxis:

1. Der Cosinus **33°**? . . . Ordinär laut *Cos.*-Tafel $=$ **0,839**. Genauer als $\frac{1}{2}$ *ch.* $(180 - 66) = \frac{1}{2}$ *ch.* $114^{\circ} = \frac{1}{2} . 1,6773 =$ **0,83865**.

2. Der Cosinus v. **3,3°**? . . . Ordinär aus *Cos.*-Skala $=$ **0,9984**. Und genauer aus dem Doppelten, als $1 -$ *bh.* $6,6^{\circ}$, lt. *Bh.*-Sk. $= 1 - 0,00166 =$ **0,99834**.

3. Zum Cosinus $=$ **0,36** das α? . . . Ordinär lt. *Cos.*-Tafel $=$ **68,9°**. Genauer aus dem Doppelten als *Ch.* $(180 - 2\alpha)$ d. i. des dopp. Complementswinkels; somit als 72 in der *Ch.*-Spalte gesucht, deutet auf 42,19 d. i. auf das Compl. 21,095 u. folgl. auf $\alpha = 90 - 21,095 = 68,905^{\circ} =$ **68° 54′**.

4. Zum Cosinus $=$ **0,90** das α? . . . Ordinär aus *Cos.*-Tafel folgt $\alpha =$ **25,8** bis **25,9°**. Genauer: von 1 abgezogen u. dann als Bogenh. des dopp. α; also $1 - 0,90 = 0,10$ in *Bh.*-Tafel aufgesucht, zeigt $2\alpha = 51,69$ u. somit $\alpha = 25,845^{\circ} =$ **25° 51′** knapp.

Der Knecht als vollkommenere **Tangenten-Tafel**; od. Lehrbeispiele unter Mitanwendung der Form. 18 u. 19. (Zur Ergänz. v. § 83, 3.) § 88.

1. Die Tangente v. **10° 21′**? . . . Ord. aus dem recht. Rande: *tg.* $10,35^{\circ} =$ **0,181** bis **0,183**. Genauer aus dem dopppelten Gradmas; $= \dfrac{\frac{1}{2}\,ch.\,20,7}{1 - bh.\,20,7}$,

was man mittels gleichzeitiger Ablesung aus der Spalte *Ch.* u. *Bh.* entnimmt, u. zwar am bequemsten, gleich wie daselbst angegeben, in 100facher Größe und dann als $\frac{1/_2\, ch.\, 20{,}7^\circ}{100 - bh.\, 20{,}7} = \frac{1/_2 \,.\, 35{,}92}{100 - 1{,}627} = \frac{17{,}96}{98{,}373} = \mathbf{1{,}830}.$

2. Zur Tang. **0,10** das α? ... Ordinär mittels *Tg.*-Taf., deren 10 auf 5,7° weist. — Genauer mittels Formel 19, wonach $1 - \sqrt{\frac{1}{1+0{,}10^2}} = bh.\ 2\,\alpha$; $= 1 - \sqrt{\frac{1}{1{,}01}}$; mittels Reciprokentafel $= 1 - \sqrt{0{,}9901}$; mittels *Qw.*-Tafel $= 1 - 0{,}995 = 0{,}005$; oder in genauerer Wurzel (durch Multiplikation des Radicanden mit 4) $= 1 - 0{,}99502 = 0{,}00498$. Dieß *Bh.* 100fach od. als 0,498 in *Bh.*-Tafel gesucht, zeigt $2\,\alpha = 11{,}47^\circ$ u. somit $\alpha = 5{,}73^\circ$ od. **5° 44′**.

Zusatz. **Die Cotangente** ist nach Formel 3 leicht durch Voriges zu umgehen: in ihrer Doppeleigenschaft als Reciproke der *tg.* oder aber als *tg.* des Complementswinkels. Z. B.

3. Cotangente v. **80°**? $= tg.$ v. 10°; und nun wie oben sub 1.

4. Zur Cotangente **1,369** der Winkel α? ... eine Frage, welche gleichbedeutend ist mit: Zur $tg. = \frac{1}{1{,}369}$ (lt. Reciprokentafel = 0,7304) das Gradmas α? Und nun wie oben sub 2. Ordinär z. B. aus *Tg.*-Taf. bei 73,04 . . $\alpha =$ **36,1°**.

§ 89. Der Knecht als vollkommenere **Secanten-Tafel** ꝛc.; od. Lehrbeispiele unter Mitanwendung der Formeln 4, 5, 16 u. 17. (Als Ergänzung zu § 83, 5.)

Da jede Secante die Reciproke des Cosinus und jede Cosecante die Reciproke des Sinus, zugleich aber jede Cosecante auch die Secante des Complements, so folgt: Für die gröbere Praxis arbeite mit Meßknechts Secanten-Tafel am rechten Rande, u. für die feinere in der Art der §§ 86 u. 87 unter Mithülfe der Reciprokentafel.

1. Die Secante zu **10° 5′**? ... Laut *Sec.*-Spalte zu 10,1° = **1,016** knapp. Genauer nach $sec.\ 10^\circ\, 5' = \frac{1}{cos.\, 10^\circ\, 5'} = \frac{1}{1 - bh. 20^\circ 10'}$ od. $\frac{1}{1 - bh. 20{,}17^\circ}$; was laut *Bh.*-Spalte $= \frac{1}{1 - 0{,}01542} = \frac{1}{0{,}98458}$; eine Division, welche Meßknechts Reciprokentafel mit **1,0158** u. dessen Logarithmentafel mit **1,0157** auflöst.

2. Die Cosecante v. **10° 5′**? ... = *sec.* v. 79° 55′. Laut *Sec.*-Spalte zu 79,9° hundertfach = 570 bis 575, einfach also etwa **5,73**. Genauer aber nach $\frac{1}{sin. 10^\circ\, 5'} = \frac{1}{1/_2\, ch.\ 20{,}17^\circ}$; lt. *Ch.*-Sp. $= \frac{1}{1/_2 \,.\, 0{,}3500} = \frac{1}{0{,}175}$; lt. Reciprokentafel = **5,714**.

3. Welche Neigung α muß eine Bahn oder eine Fläche haben, welche netto 5% größer sein soll als ihr Horizontalgrund? Oder: Zur *sec.* = **1,05** welches α? ... Laut *Sec.*-Sp. zeigt deren 105 auf $\alpha = 17^3/_4{}^\circ$. Genauer aber so: Indem $\frac{1}{sec.\,\alpha} = cos.\,\alpha = \frac{1}{1{,}05}$ d. i. laut Reciprokentafel = 0,9525, u. $1 - cos.\,\alpha = bh.\ 2\,\alpha$, hier also $1 - 0{,}9525 = 0{,}0475$ u. indem dieses *Bh.* als 4,75 an linker Oberecke auf $2\,\alpha = 35{,}45^\circ$ zeigt, folgt $\alpha = 17{,}725^\circ$ od. **17° 43′** bis **17° 44′**.

☞ **Wegen Anwendung der beiden Kapitel 5 u. 6 auf's Leben** ☜ s. u. a. „Brieftasche“ Kap. I, II, VI, VII u. a. a. O.; sowie unten im vierten Abschnitte: „Geodäsie.“

Kap. 7. Meßknechts combinirte Kreis- u. Kreissegmenten-Tafel.

Vom Kreis im Allgemeinen. § 90.

Bezeichnet r den Radius, d od. D den Durchm., u od. U den Umfang u. F od. Kr. die Kreisfläche, sowie U. d u. Kr. d den Umfang resp. die Kreisfläche zum Durchm. d, z. B. Kr. 8 die Kreisfläche zum Durchm. 8 (also nicht zum Radius 8); und wird wie gewöhnlich das Verhältniß $\frac{\text{Umkreis}}{\text{Durchm.}} = \frac{\text{Halbkreis}}{\text{Radius}} = 3{,}1415927$ od. nahe zu $^{22}/_{7}$ durch π (pi) bezeichnet, wo dann $\pi/_4 = 0{,}7854$, so gilt bekanntlich, wie in allen Lehrbüchern bewiesen wird:

(1) $u = bg.\, 360^\circ = \pi\, d$ od. $2\pi r$; (2) $bg. 1^\circ = \frac{\pi}{360} . d$ od. $\frac{\pi}{180} r = 0{,}01745..r$;

(3) $bg.\, \alpha^\circ = 0{,}01745 .. \alpha r$. Und für die Vollkreisfläche

(4) F od. $Kr.\, d = \pi/_4\, d^2$ od. πr^2 od. $\frac{\pi}{4 u^2}$; sowie für

(5) die zum Centrumswinkel α gehörige Sectorfläche $S = \frac{\alpha}{360}$ Kr. d od. $\frac{\pi \alpha}{360} r^2$ und

(6) die zum Centr. $\angle$ od. Bog. α° gehör. Segmentfläche $s = \frac{bg.\, \alpha - sin.\, \alpha}{2} . r^2$.

Während man beim vollen U u. F in der Regel den Durchmesser als Einheit oder als gegeben od. gesucht betrachtet, pflegt man im Uebrigen die Formeln u. Tafelwerthe, analog den trigonometrischen, stets auf den Radius als Masstab, d. i. auf r = 1 zu beziehen. — Formel 4 gibt die Fläche natürlich in demselben (aber quadrat.) Mase mit welchem d gemessen u. eingesetzt worden. Soll jene aber nach □-Fußen angegeben werden, während d mit 10- od. 12 mal kleinerm Mase d. i. mit Dezimal- resp. Duodezimal-Zollen beziffert ist, so geht Formel 4 über (mittels Div. durch 10^2 u. 12^2) in

(7) $Kr.\, d = \frac{\pi}{400} d^2$ beim Dezimalmas; u. (8) $Kr.\, d = \frac{\pi}{576} d^2$ beim Duodezimalmas.

(Ueber Verf.'s Näherungsformel ... 8^b ... d . $^d/_2$. 11 minus 1 % s. § 93.)

Die Vollkreistafel auf Meßknechts linker Wand gibt, auf § 91.
Grund der Formeln 1, 7 u. 8 construirt, in ihrer Mittelskala die Kreisflächen und zwar zunächst nach □-Fußen zu dem links nach Dezimalzollen u. rechts nach Duodezzollen eingetragenen Durchmessern D; während die letzterm sich anschließende U-Skala zu jedwedem U das zugehörige D zeigt, u. umgekehrt; und in dieser Eigenschaft natürlich für jedwedes Mas gelten muß. Ihre Ueberschrift „Duod." bezieht sich nur auf ihre Benutzung zur Flächenablesung, also auf die Mittelskala. Eben so klar ists, daß die linke D-Spalte auch für Centimeter (Neuzolle) gilt u. dann hierzu die Kreisfläche in Quadrat-Decimetern anzeigt. Jenachdem man aber die Fläche ebenfalls nach (Quadr.-)Centimetern oder aber nach (Quadr.-)Metern haben will, hat man einfach das Komma der □-Spalte um zwei Stellen rechts od. links zu rücken. — Solchergestalt ist diese Kreistafel nicht blos eine ganz allgemeine, für jedwedes Mas (Ellen, Ruthen, paris. Linien ꝛc.) gültige, sondern auch vermöge ihrer mit Einem Blicke übersichtlichen Combination dreier Eingänge eine ganz universelle, u. zu Uebungen wie zu ernstern Arbeiten von beachtenswerther Ausgiebigkeit; unter anderm z. B. auch zur flotten Verwandlung von Duodez- in Dezimalzolle u. umgekehrt: hier nämlich mittels Ablesung der einander gegenüberstehenden D-Zahlen.

Zum Zwecke möglichst feiner Arbeiten in obigem Sinne, wie auch behufs etwaiger Doppelablesungen zur Controle, merke man sich nur noch Folgendes:

1. Beim Gebrauch der U- mit D-Spalte, d. i. bei Uebersetzungen der Umfänge in Durchm. u. umgekehrt: Wenn das gegebene D od. U für die Tafel zu klein,

so nimm dessen 2- od. 3- od. 10 faches u. dividire das dazu Abgelesene eben so viel mal mit 2 resp. 3 od. 10, u. so umgekehrt; wenn das Gegebene über die Tafel hinausfällt, nimm dessen Halbes, Drittel od. Zehntel u. das Abgelesene beziehl. 2- od. 3- od. 100 fach.

2. Bei Uebersetzungen aus dem **D** (od. **U**) ins **Kr.**, d. i. bei Lösung der Aufgabe: zu jedwedem Durchm. (od. Umf.) die Kreisfläche zu finden. Wenn das gegebene D für die Tafel zu klein od. zu groß, so multiplicire od. dividire es mit 2 od. 3 od. 10 u. behandle die abgelesene Fläche entgegengesetzt mit den Quadraten d. i. 4 od. 9 od. 100.

3. Bei Uebersetzungen aus dem **Kr.** ins **D** od. **U**, oder bei der Forderung, zu jedweder Kreisfläche den entspr. Durchm. od. Umf. anzugeben: Wenn die gegebene Kreisfl. für die Tafel zu klein od. zu groß, so multiplicire resp. dividire sie mit 4 od. 9 od. 100 u. behandle den dazu abgelesenen D od. U entgegengesetzt mit den Wurzeln dieser Zahlen: 2 resp. 3 od. 10.

4. Uebrigens ist Jeder, der öftrer in die Lage kommt, die Stärken von Kreiskörpern, z. B. von Rundhölzern, mit dem Bande zu messen, entschieden zu tadeln, wenn er sein Meßband nicht gleich auf die direkte Durchmesserablesung einrichtet. Theilt er nämlich je 11 Zoll od. Cent Bandlänge in je 7 gleiche Theile, so entspricht jeder solcher Theil $= \frac{1}{2}''$ od. $\frac{1}{2}^{cm.}$ des Durchmessers und zwar bis auf $\frac{1}{25}$ % oder $\frac{1}{2500}$ genau.

§ 92. **Zur Ablesungspraxis der combinirten Kreistafel; oder Lehrbeispiele zum Gebrauch der U-, D- u. Kr.-Skalen.**

A. Umfang u. Durchmesser. — Formeln: $U = \pi D$; $D = \frac{1}{\pi} U$; $\pi = 3{,}14159$ od. (um $\frac{1}{25}$ % zu groß) $\frac{22}{7}$; $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831 = \frac{7}{22}$.

1. Zum U = 3,1 Meter gehört welch ein D? ... Das U = 3,1 zeigt auf's D = 0,99. Oder genauer, durch das 10 fache U = 31, welches deutlich (10 mal kleiner) auf 0,986 zeigt. Oder noch genauer durch das 20 fache U = 62, das im D auf 19,73 zeigend damit ein D = 0,9865 angibt.

2. Ein Kreisumfang von 215 Centimeter entspricht einem Durchm. von? ... Beim U = 21,5 steht ein D = 6,84; somit das gesuchte = 68,4 Cent.

3. Für einen Stamm von netto 20 Zoll Durchm. muß das umlegte Band welchen Umf. zeigen? ... Lt. rechter D-Spalte zeigt D = 20 auf ein U = 62,8 (reichl.).

§ 93. **Fortsetzung.**

B. Durchmesser u. Kreisfläche (K) nach seitherigem Duodezimalmas. — D in Zollen, K. in □-Fußen. — Formeln: $K = \frac{\pi}{576} D^2 = 0{,}005454\ D^2 = \frac{6}{1100} D^2$; $D = 24 \sqrt{K/\pi} = \sqrt{\frac{1100\ K}{6}}$. — Fürs Kopfrechnen: $K = D \times \frac{D}{2} . 11$ u. Komma selbstverständlich; gibt knapp 1 % zuviel, daher für genauere Zwecke das erstre $(D . \frac{D}{2})$ oder das Schlußresultat um knapp 1 % kürzen.

1. Zum D = 1,15″ die K? ... Die rechte D-Skala bei 1,15 zeigt auf 0,0072 □′. Genauer: zum 10 fachen D = 11,5 zeigt die K-Skala $\frac{0{,}721}{100}$ = 0,00721 □′.

2. Zum D = $17\frac{1}{4}$″ die K? ... Da die Viertelzolle durch Punkte markirt sind, liest man beim Punkt unter D_{17} ... K = 1,625 □′.

3. Zum D = $68\frac{1}{2}$″ die K? ... Indem zum 10 mal kleinern D = 6,85 die K-Spalte 0,256 zeigt, antwortet sie damit: 25,6 □′. — Oder etwas sichrer mittels halbem D = $34\frac{1}{4}$ und zugehörigem K = 6,40; woraus 6,40 × 4 = 25,60 □′.

4. Ein Stamm von netto 3 □′ Stärkenfläche muß welchen Durchm. in Duodezzollen zeigen? ... Die K-Spalte zeigt bei 3,00 rechts auf ein D = 23,44 Duod.″ (gleichzeitig links auf ein D = 19,54 Dec.″).

5. Zu einem K von netto $\frac{1}{4}$ Q′ = 0,25 □′ bedarf es eines D von? ... Das 0,25 der K-Sp. zeigt rechts auf ein D = 6,76″. Oder sichrer das 4 fache K = 100 zeigt auf das 2 fache D = 13,54 u. somit auf das gesuchte = 6,77″.

6. Zu einem K von 20 □′ würde welcher D nach Duodezzollen gehören? ... Da 20 über die K-Tafel hinaus fällt, so lesen wir zum 100tel K = 0,20 das 10tel D = 6,05 u. damit das gesuchte 60,5″. Oder aber (sichrer) zum viertel K = 5,00 das halbe D = 30,27 u. daraus das richtige = 30,27 × 2 = 60,54″.

Fortsetzung. § 94.

C. Umfang u. Kreisfläche nach seitherigem **Duodezimalmas.** U in Zollen, K in Quadratfußen. — Formeln: $K = U^2/576\pi = 0{,}000553\, U^2$; $U = 24\sqrt{\pi K}$. Fürs Kopfrechnen: $U \,.\, U/2 \,.\, 11$; plus ½ Procent. Comma selbstverständlich.

1. Zu 4,52″ Umf. gehört eine Kreisfl.? . . . Das $4{,}5_2$ der U-Sp. zeigt über die D-Spalte hinweg auf ein K = 0,0113 □′. Oder sicherer mittels des 10fachem U = 45,2 auf das 100fache K = 1,125 u. damit auf 0,01125.

2. Zum Umf. von 100 Duod.″ gehört welch ein Durchm. u. Kreisinhalt? Bei U = 100 liest man mit Einem Blicke: D = 31,82″ u. dazu K = 5,52 □′.

3. Ein Umf. von 300 Duod.″ gehört zu welchem Durchm. u. Kreisinhalte? Zum zehntel U = 30 lesen wir das zehntel D = 9,54″ mit dem hundertel K = 0,496 □′, also ist das gesuchte D = 95,4″ u. K = 49,6 □′. Oder etwas sicherer: Das halbe U = 150 weist auf das halbe D = 47,75″ mit dem viertel K = 12,43 □′ u. somit, durch × 2 u. × 4, auf das gesuchte D = 95,5″ u. K = 49,7 □′.

4. Zur Stammgrundfläche 2,15 □′ den zugehörigen Durchm. u. Umfang in Duodezzollen anzugeben! . . . Mit Einem Blicke zeigt K = 2,15 rechts auf ein D = 19,85″ u. ein U = 62½″ od. schärfer 62,4″.

5. Dasselbe zum K = 21,5 □′! . . . Zum hundertel K = 0,215 zeigt sich rechts das zehntel D = 6,29″ mit U = 19,75″ und damit das gesuchte D = 62,9″ u. U = 197,5″. Oder zur Controle: Das viertel K = 5,375 □′ zeigt auf das halbe D = 31,4 u. halbe U = 98,7″ u. somit auf das richtige D = 62,8″ u. U = 197,4″.

Fortsetzung. § 95.

D. Durchmesser u. Kreisfläche nach **decimalem od. metrischem u. jedwedem Mas.** (Vgl. § 91.) Wenn man in der K-Skala das Comma wegläßt, werden deren Inhaltsziffern gleichnamig mit dem linken D-Eingange. Wenn also K gesucht in gleichem Mase mit dem gegebenen D: zweistelliges Rechtsrücken des Comma's in der K-Spalte! Formeln hierfür, d. i. für D u. K in gleichem Mas: $K = \pi/4\, D^2 = 0{,}7854\, D^2$; $D = 2\sqrt{K/\pi} = 1{,}1284\sqrt{K}$. Fürs Kopfrechnen: $K = D \,.\, D/2 \,.\, 11/7$; Comma selbstverständlich. — Abkürzungen: Es bedeutet . . .^{m} Meter, . . .^{cm} od. . . .^{c} Centimeter od. Cent, . . .^{mm} Millimeter; u. $□^m$, $□^{cm}$, $□^{mm}$ Quadratmeter, Quadratcentimeter ꝛc.

1. Zu 3,05 Dec.″ die Kreisfl. in □′? Laut link. D = 3,05 . . . K = 0,073 □′. Oder laut 2fachem D = 6,1 das 4fache K = 0,292 u. somit K = 0,0730 □′. Oder noch genauer laut 10fachem D = 30,5 das 100fache K = 7,31, u. somit K = 0,0731 □′.

2. Zu 3,05 Decimeter (= 30,5^{cm} = 305^{mm}) die Kreisfläche nach $□^m$? . . . Genau wie vorhin.

3. Zu 16¼^c Durchm. die Kreisfl. nach $□^c$ u. $□^m$? . . . Laut linker D-Spalte zeigt D 16¼ im K mit 2stelligem Rechtsrücken des Comma, auf 207 $□^c$ (reichl.); schärfer abgelesen etwa 207,3. Oder lt. 2fachem D = 32½ das 4fache K = 830, das gesuchte also = 207,5 $□^c$; u. damit, durch 4stelliges Linksrücken des Comma, K = 0,02075 $□^m$.

4. Zu einem D von 98,5 Cent die Fläche nach Cent u. Metern? . . . Laut zehntel D = 9,85 das hundertel K = 76,1 $□^c$, das volle K also 7610 $□^c$ od. 0,761 $□^m$. Genauer laut drittel D = 32,83^c das neuntel K = 846 bis 847 $□^c$, durch × 9 also = 7614 bis 7623 $□^c$ oder 0,762 $□^m$.

5. Ein Radius von 12^m erzeugt welche Kreisfläche? . . . Zum linken D = 24 zeigt die K-Spalte 452 $□^m$.

6. Zu einem Kreise von 325,4 $□^{cm}$ den Durchmesser nach gleichem Mase, also nach Cent anzugeben! Die K-Skala, unter Ignorirung des Comma, zeigt bei 325 reichl. auf D = 20,35^c od. 0,2035^m.

7. Wie groß der Durchmesser, um 1 Ar od. 100 $\mathfrak{Q}^m$ als Kreis darzustellen? Laut 2stellig rechts gerücktem oder aber nicht beachtetem Comma zeigt K bei 100 ein D = 11,28^m; oder laut 4fachem K . 400 das doppelte D = 22,57, u. damit das einfache D = 11,285^m.

8. Um einen preuß. Morgen à 180 □-Ruthen mittels einer Schnur als Kreis abzustecken, wie lang muß letztre als Radius sein? . . . Zu K = (1,80 od.) 180 zeigt sich der D = 15,14, also der R = 7,52 Ruthen.

9. Welch einen Stammflächenzuwachs konstatiren fünf Jahresringe von zusammen 17^{mm} od. 1,7^c Mittelbreite gegenüber einem innern Durchm. von 18,9^c? Durchmesserzuw. = 1,7 × 2 = 3,4^c; äußerer Durchm. = 18,9 + 3,4 = 22,3^c.
Laut D = 18,9 ist K = 281 $\mathfrak{Q}^c$ knapp } 5jähr. Zuwachs
" D = 22,3 . . . = 391 $\mathfrak{Q}^c$ " } = **101** $\mathfrak{Q}^c$.

10. Ein Stamm erweist in Kopfhöhe einen mittlern Drchm. v. 63,3^c excl. Rinde und die zwei zugehörigen mit dem Zuwachsbohrer (s. B.'s Forstls. Hülfsbuch) erbohrten Spähne erwiesen, addirt, für's vorletzte Jahrfünft einen Durchmesserzuw. von 22^{mm} u. gegenwärtig nur von 21 Millimeter. Um wieviel hat hiernach der Grundflächenzuwachs abgenommen?

Drchm. jetzt . . . = 63,3^c.	Kreisfl. dazu (bei D = 6,33) = 3130 $\mathfrak{Q}^c$.	Zuwachs	
" 5 J. später = 65,5^c.	" " (. . . . 6,55) = 3360 "	230 $\mathfrak{Q}^c$.	Diff. = 10 $\mathfrak{Q}^c$.
" 5 J. später = 67,6^c.	" " (. . . . 6,76) = 3580 "	220 $\mathfrak{Q}^c$.	

Zusatz. Genauer, wenn man die drei D halbirt und das Schlußresultat vervierfacht; wo dann

Keisfl. 31,65 = 787,0	Diff. 56,5 × 4 = 226 $\mathfrak{Q}^c$.	Diff. = 10 $\mathfrak{Q}^c$.
" 32,75 = 843,5	" 54,0 × 4 = 216 $\mathfrak{Q}^c$.	
" 33,80 = 897,5		

§ 96. Anhang. **Ellipsenfläche**. (Weiteres zur Geometrie der Ellipse s. Brieftasche Kap. VI.)

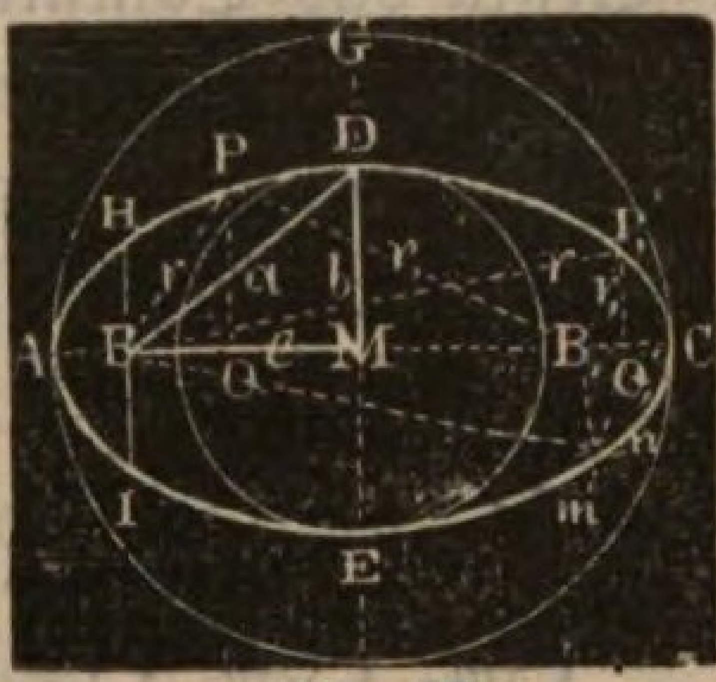


Fig. 27.

Bezeichnet AC = d die große u. DE = δ die kleine Achse, also d u. δ den größten u. kleinsten Durchm. der Elipse, so erhält man bekanntlich letztere, wenn man alle zu DE parallele Sehnen des umschriebenen Kreises AGC ꝛc. im Verhältniß d : δ verkleinert oder alle zu BB parallele Sehnen des um DE eingeschriebenen Kreises im Verhältniß δ : d vergrößert. Bezeichnet also *Kr.* d u. *Kr.* δ diese betreffende Kreisfläche u. E die der Ellipse, so ist *Kr.* d : E = d : δ, u. E = (*Kr.* d) $\delta/_d$; od. *Kr.* δ : E = δ : d, u. E = (*Kr.* δ) $^d/_\delta$;
also (1) E = Kreisfläche der großen Achse gemindert } im Verhältniß der beiden
(2) E = " " kleinen " gemehrt } Achsen.

Um E aus dem geglichenen Durchm. zu quadriren müßte man rechnen

(3) E = Kreisfläche $\left(\frac{d+\delta}{2}\right)$ — Kreisfläche $\left(\frac{d+\delta}{2}\right)$.

Beisp. Eine Ellipse von 3,6^m großer Achse u. 1,6^m kleiner Achse muß wieviel Inhalt haben? . . . Nach (1) = Kreisfl. 3,6^m × $^{16}/_{36}$ od. × $^4/_9$; laut linkem D_{36} = 10,18 $\mathfrak{Q}^m$ × $^4/_9$ = 4,53 $\mathfrak{Q}^m$. — Nach Formel 3 gibt der Knecht zu *Kr.* 2,6 — *Kr.* 1,0 bei D = 26 und D = 10 . . . 5,31 — 0,785 = 4,525 $\mathfrak{Q}^m$. Der arithmet. mittl. Durchm. hätte also hier 0,78 $\mathfrak{Q}^m$ (od. fast 18 %) zuviel gegeben.

§ 97. Meßknechts combinirte **Kreissegmententafel** für Chorde u. Bogenhöhe, Bogenlänge u. Segmentsfläche.

Indem der Knecht, wie Kap. 5 bewiesen, oberhalb seiner eben behandelten Kreistafel mittels der daselbst befindlichen *Ch.*- u. *Bh.*-Skalen zu jedwedem Gradmas eines Bogens od. Segments die entsprechende Chorde u. Bogenhöhe (Segments Sehne u. Pfeil) u. dazu nun unterhalb, am runden Rande seiner Kreisfläche, die zugehörigen Bogenlängen u. Segmentsflächen (diese für r = 1 u. daher mit r² zu multipliciren) angibt, und zwar letztere aller-

dings zunächst nur bis 120°: so empfiehlt sich solchergestalt dem geometrischen Rechner sein dienstbereites Aschenbrödel auch als eine dem Vorigen an Vielseitigkeit ziemlich ebenbürtige Segmententafel. — Denn die **Bogenlängen über** 120° sind fast mit gleicher Leichtigkeit wie die von 0—120° daraus abzulesen, indem man die größern halbirt od. zehntelt und den hierzu gehörigen Bogen doppelt resp. zehnfach nimmt.

Wenn es sich dagegen um **Bogen über** 120° für die Segmentsfläche handelt, so hat man allerdings die Fortsetzung der Skala nach § 90 (Formel 6, Segmentsfläche $s = \frac{bog.\alpha - sin.\alpha}{2} r^2$) zu bewirken, was jedoch mit dem Knechte (da bei ihm die Skalen *Bog.* u. *Sin.* neben einander laufen) ganz flott geht, wie folgender § im 7. Beispiele zeigt. — Bei der **Flächenablesung** vergesse man aber nie, daß (wie mit ihrem r^2 auch schon vorstehende Formel erinnert) jene Segmentenziffer des Knechts noch mit dem **Quadrate** des entspr. Radius zu multipliciren ist.

Lehrbeispiele zur Bogen- u. Segment-Skala. (Für genauere Fälle: siehe Meßknechts linken Zwickel.) § 98.

1. Wie lang ist ein Bogen v. 18,4° mit einem Krümmungshalbmesser v. 200^m? Antw.: Winkelskale des linken Randes zeigt mit 18,4° auf den Einheitsbog. 0,321 d. i. auf den 200fachen . . . 64,2^m. Oder etwas genauer: Zum 5fachen Gradmas 92,0° mit dem fünftel Radius 40 . . . gibt die *Bg.*-Sp. 1,605 × 40 = 64,20^m.

2. Ein Bogen v. 175° mit einem r = 12^{cm} müßte welche Rundlänge haben? Antw.: Zum Zehntelgradmas 17,5 den Bogen für r = 1 abgelesen, gibt 0,305, also für den Radius 12″ . . . *bg.* 175° = 3,05 × 12 = 36,6^{cm}. — Oder genauer: Zum halben Gradmas 87½° den Bogen 1,527 doppelt und dann × 12, also 3,054 × 12 = 36,65^{cm}.

3. Wenn man aus einem Rundholz v. 24^{cm} Durchm. einen Sektor oder ein Segment von gleichlanger Rundseite schneidet, welches Gradmas α hat da letztere? Bogenlänge pro r = 1 ist 24/12 = 2,00; zeigt 100fach als 200 auf ein α = 114,6°.

4. Wenn aber der vorige Einheitsbogen = 2,84 gewesen wäre, wie groß dann α? Zum halben *bg.* = 1,42 od. 100fach 142 zeigt die *Bg.*-Skala auf den halben Winkel 81,3°, u. somit auf α = 162,6°.

5. Wie groß ist jedes der 4 Segmente des eingeschriebenen Quadrats u. wie verhält sich jedes derselben zum zugehörigen Central-Dreieck DAM? Für den Radius 1 od. Durchm. 2 ist laut linkem D = 20 die K = 314, also Quadrant od. Sektor v. 90° = 314/4 = 78,5. Dann laut Segmenttafel die Segmentfläche zu 90° = 28,6; somit Dreiecksfläche = 78,5 — 28,6 = 49,9; somit Δ : Sg. = 49,9 : 28,6 = 1 : 1,74 od. = 100 : 0,575. Die 4 Segmente bilden demnach reichlich 57 % der Quadratfläche.

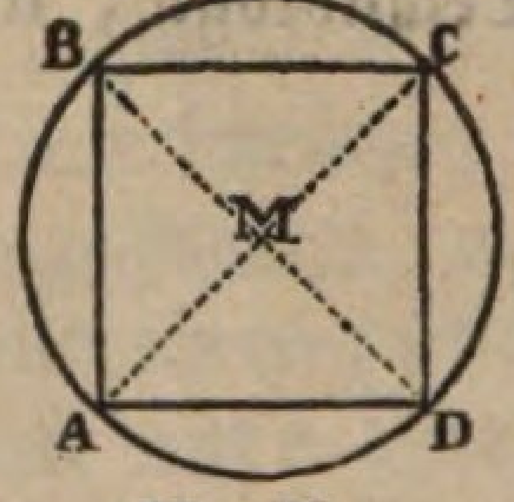


Fig 28.

6. Eine Walze von 60^c Durchm. zu einem gleichseitig achteckigen Prisma von gleichem Durchm. behauen od. geschnitten, muß pro Segment wieviel Stärkenfläche hergeben? . . . Segment zu 360/8 = 45° laut Knecht 0,039 r² = 0,039 . 30² = 0,039 × 900 = 35 □^{c}.

7. Zum Bogen von 150° u. Radius von 5^m die Segmentfläche Sg.?

$$Sg. = \frac{bg.\,150° - sin.\,150°}{2} = \frac{10\,bg.\,15° - sin.\,30°}{2} = \frac{2,62 - 0,50}{2} = 1,12\ r^2.$$

Also pro r = 5 . . . Sg. = 1,12 . 25 = 28 □^{m}.

Beispiele zur Rekapitulation. § 99.

1. Aus Meßknechts linkem Zwickel mit größrer Feinheit, als dessen Linienwerk gestattet, abzuleiten:

(1) **Kreisumfang** zu 8^{mm} Durchm.? . . . = πd = 3,1415927 . 8 = 25,1327416. —

(2) **Kreisfläche** zu 20^m Umf.? . . . $= \frac{u^2}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{400}{4} . 0,318310$ = 31,8310 □^{m}.

(3) Natürl. Bogenlänge zu 1 Min. od. $1/_{60}$ °?... Bogenl. = 0,01745 . $1/_{60}$ = 0,000291
(4) Sin. od. Tang. v. 10′ bis zur 6. Decimale genau? ... = 0,0002909 . 10 = 0,002909
(5) Sin. od. Tang. v. 1° (od. 60′) bis zur 5. Dec. genau?.. = 0,0002909 . 60 = 0,017454

2. Die Bahnrichtung AB soll in die um den Winkel $\alpha = 31,4°$ abweichend Richtung CE mittels einer Curve von 200 Meter Radius (BM = CM) übergeführt u. demgemäs von unserm Ingenieur-Meßknecht angegeben werden: 1. Die Entfernung der Curven-Endpunkte B u. C vom Durchschnittspunkte D der beiden Bahnrichtungen; 2. die Entfernung DM des letztern vom Curven-Mittelpunkte; 3. die Curvenlänge CFB; 4. deren Spannung CGB; 5. deren Höhe FG u. 6. ihre Abschnittsfläche CFBC.

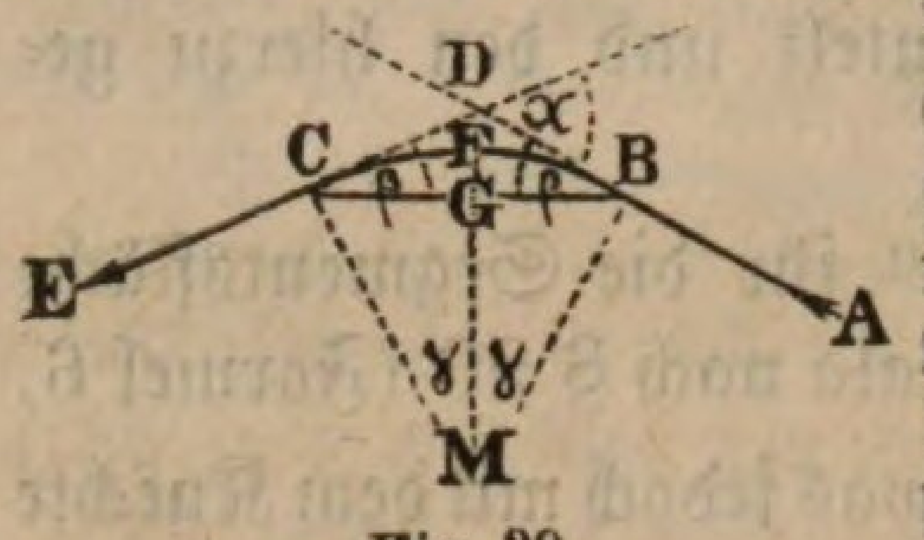


Fig. 29.

Auflösung. Da das Viereck MCDB bei C u. B rechtwinklig, folglich M wie das Supplement des Winkels CDB, woraus weiter die Congruenz der links u. rechts von MD liegenden Dreiecke u. Winkel und $\gamma = \beta = 1/_2 \alpha$ folgt, so hat man zunächst für die Fragen 3 bis 6:

Ad 4. BC = 200fache *Ch.* 31,4° (linke Ecke) = 2 . 54,12 = 108,24^m;
Ad 5. GF = 200fache *Bh.* 31,4° (linke Ecke) = 2 . 3,73 = 7,46^m;
Ad 3. CFB = 200fache Bog. 31,4° (linker Rand) = 200 . 0,548 = 109,6^m;
Ad 6. Sgm.-Fläche = 200² Sgm. 31,4° (link. Rand) = 40000 . 0,0134 = 536 □^{m}
Und sodann für die Frage
1. CD = CMfache *Tg.* γ = 200 *tg.* 15,7° (rechter Rand) = 200 . 0,281 = 56,2^m
[Oder auch als CGfache *Sec.* β = 54,12 *sec.* 15,7° = 54,12 . 1,038 = 56,18^m.]
Und nun noch für die Frage
2. DM = MCfache *Sec.* von γ = 200 *sec.* 15,7° = 200 . 1,038 = 207,6^m.

Und alles dies, ohne ein einziges Mal umzublättern und ohne irgend eine Interpolationsrechnung!

Weitere Unterlagen u. Fingerzeige zur pädagogischen wie technischen Ausbeutung der in den drei planimetrischen Kapiteln (5, 6 u. 7) erläuterten Gesetze u. Hülfen siehe in den verschiedenen Kapiteln der Brieftasche, insbesondere denen der Stereometrie, Mechanik, Maschinenlehre und Technologie; außerdem auch weiter unten.

Kap. 8. Zur Pyramiden- u. Kegellehre.

NB. Wenngleich das Nachfolgende zunächst nur auf die (gradseitigen u. aus- u. eingebauchten) Kegel od. Konoiden bezogen, wird es in entsprechender Weise doch auch gleichzeitig für alle derlei Pyramidalformen gültig: indem man unter G, g, γ ꝛc. statt der Kreise sich Drei-, Vier- u. Vielecke und unter D, d, δ ꝛc. statt der Durchmesser irgend welche homologe Dimensionen der betreffenden Querschnitte denkt. Wegen des Ellipsenkegels siehe unter Kap. 9.

Die drei Vollkegel: **1.** den (nach gemeiner od. apollonischer Parabel oder kurzweg) parabolisch ausgebauchten od. Parabelkegel oder das Paraboloid; **2.** den gradseitigen od. gemeinen Kegel und **3.** den (nach der semicubischen oder neil'schen Parabel od. kurzweg) neilisch-eingebauchten od. Neiloid-Kegel — haben wir bereits aus Kap. 4, gelegentlich einiger Anwendungen der Reihenlehre, u. zwar in vergleichender Darstellung als Rückungskörper aufgefaßt, sowohl in absicht ihrer Form als ihrer Inhaltsgesetze kennen gelernt. Wir haben daher hier nur, theils als Rekapitulation der §§ 72—77 theils als ganz nahe liegende Vervollständigung der betreff. Form- u. Kubirungsgesetze, Folgendes zusammen zu stellen. § 100.

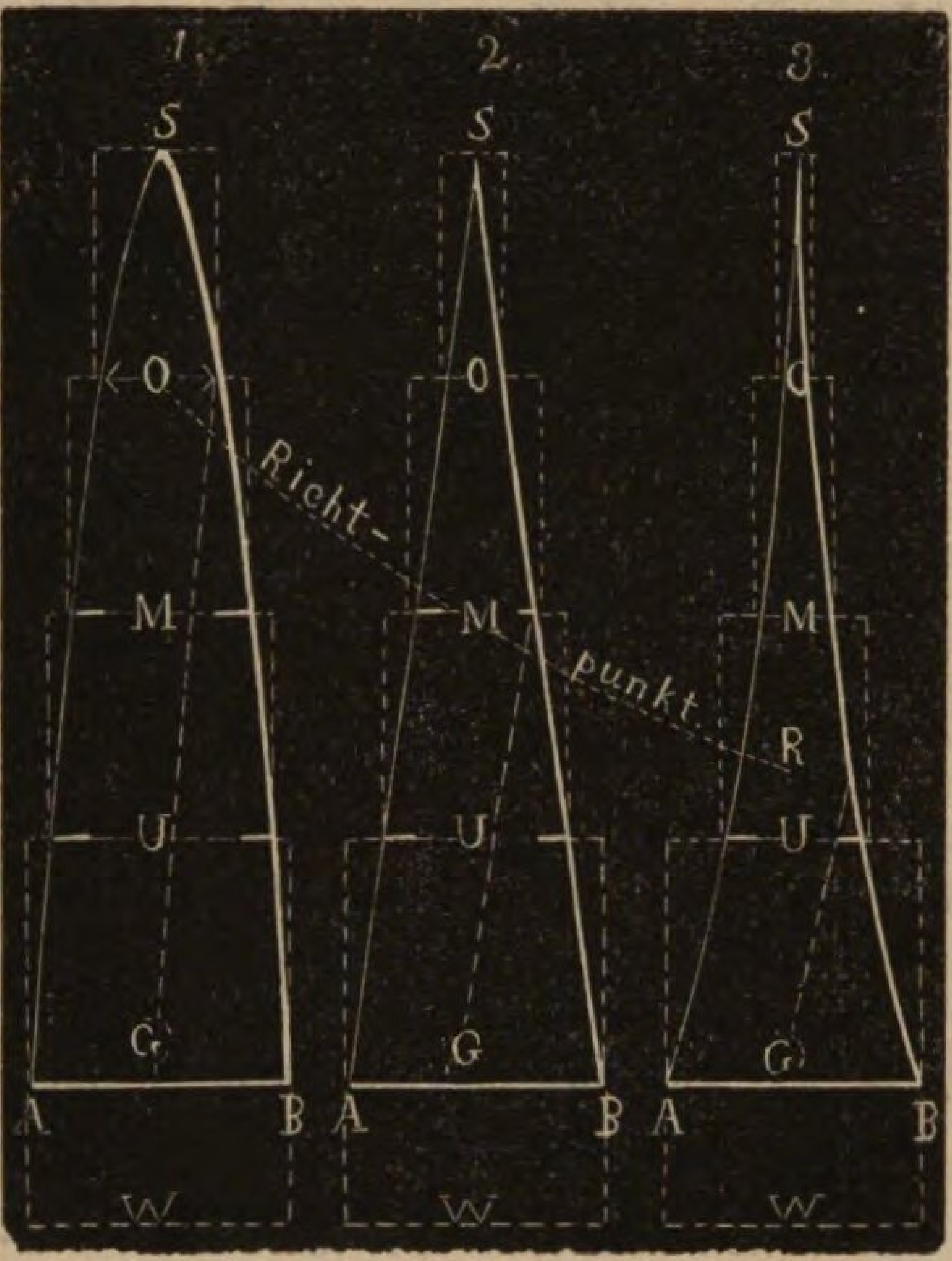


Fig. 30.

Zur Formkarakteristik. Bezeichnet wiederum G die Grundfläche u. H die Scheitelhöhe, u. G_u, G_m u. G_o die Stärkenflächen in der Unter-, Haupt- u. Obermitte d. i. in der Viertels-, Halb- u. Dreiviertelshöhe; sowie D, D_u, D_m u. D_o die entsprn. Durchmesser, und dann kürzer auch g u. d die eigentliche (d. i. Haupt-) Mittenfläche G_m u. D_m, und R den Richtpunkt oder den Punkt, wo der Stamm die halbe Grundstärke, also den Durchm. = $^D/_2$ hat und dessen so leicht erkennbare relative Höhenlage einen ebenso anschaulichen u. einfachen als zuverlässigen u. praktischen „Richtpunkt" zur Unterscheidung u. Feststellung der Form u. Formzahl unbestimmter Kegelformen oder Konoiden zu bilden vermag*); und fügt man diesem noch als einen zweiten Richtpunkt R_2 denjenigen höhern zu, wo des Konoids Stärke auf's Viertel der beim ersten R in Betracht gezogenen Grundstärke D geschwunden ist, so karakterisiren u. unterscheiden sich obige drei Formen und damit auch deren Zwischenformen wie deren außerhalb liegenden Extreme

in Absicht auf	beim **a) Parabel-Kegel.**	beim **b) Gemein. Kegel.**	beim **c) Neiloid-Kegel.**
(1) Mitten-Fläche dadurch daß	$g = {}^1/_2 G$ od. 0,50 G	$g = {}^1/_4 G$ od. 0,25 D	$g = {}^1/_8 G$ od. $0{,}12^+$ G
(1) Mitten-Stärke dadurch daß	$d = \sqrt{{}^1/_2}$. D od. $0{,}71^-$ D	$d = {}^1/_2$ D od. = R	$d = \sqrt{{}^1/_8}$ D od. $0{,}35^+$ D
(2) Stärke in **Untermitte**	$D_u = \sqrt{{}^3/_4}$ D od. $0{,}87^-$ D	$D_u = {}^3/_4$ D od. 0,75 D	$D_u = \sqrt{{}^3/_4}$ D od. 0,65 D
(2) Stärke in **Obermitte**	$D_o = {}^1/_2$ D od. = R	$D_o = {}^1/_4 D = R_2$	$D_o = {}^1/_8$ D od. $0{,}12^+$ D
(3) Höhe des **ersten Richtpkts.**	R in $^3/_4$ H od. Obermitte.	R in $^1/_2$ H od. Hauptmitte.	R in 0,3700 H od. zieml. mitten zw. Unter- u. Obermitte.
(3) Höhe des **zweiten Richtpkts.**	R_2 in $^{15}/_{16}$ H od. $^H/_{16}$ unter dem Scheitel.	R_2 in $^3/_4$ H od. Obermitte.	R_2 in 0,603 H od. $^1/_{10}$ H über der Hauptmitte.

*) Vgl. in B.'s „Forstlichem Hülfsbuch" od. auch „Holzcubirer" (3. Aufl.): Erläuterungen zur Tafel 2 u. 13.

Zur Kubirung aus **Grundstärke** (D, beziehlich G) und **Scheitelhöhe** H (Methode der Grundwalze; V = Volumen od. Inhalt).

(4) a) Parabel-Kegel . . . $V = G.H/2$ = halbe Grundwalze;
b) Gemeiner Kegel . . $V = G.H/3$ = Drittel-Grundwalze;
c) Neiloid-Kegel . . . $V = G.H/4$ = Viertel-Grundwalze;

Zur Kubirung aus **Mittenstärke** (d, beziehlich g) und **Scheitelhöhe** H (Methode der Mittenwalze g H).

(5) a) Parabel-Kegel . . . $V = gG$ = Mittenwalze;
b) Gemeiner Kegel . . $V = gH + \frac{1}{3}gH = 1\frac{1}{3}$ Mittenwalze;
c) Neiloid-Kegel . . . $V = 2gH$ = doppelte Mittenwalze.

Zur Kubirung aus **Grundstärke** (D resp. g) und **Richtpunktshöhe** r. (Verf.'s Richtpunktsmethode.)

(6) a) Parabel-Kegel . . . $V = G.\frac{2}{3}r$; b) Gemeiner Kegel . . $V = G.\frac{2}{3}r$;
c) Neiloid-Kegel . . . $V = G.\frac{2}{3}r\ (\times 1{,}013)$. Also für alle drei gemeinsam, aber bei c) mit Erhöhung um knapp 1,3%:

(7) V = „Grundfläche × 2/3 Richthöhe".
(Wenn, wie bei Anwendung auf Stämme, das D od. G in der Meßhöhe m über dem Abhiebspunkte zu nehmen, ist unter r die um $^{m}/_{2}$ vergrößerte Richtpunktshöhe — die corrigirte Richthöhe — zu verstehen. Vgl. S. 49.)

Zur Kubirung aus der Stärke bei **Drittelshöhe** (D_1 resp. G_1) und aus **Scheitelhöhe.** (Hoßfeld'sche Methode.)

(8) a) Parabel-Kegel . . . $V = G_1.\frac{3}{4}H$; b) Gem. Kegel . . $V = G_1.\frac{3}{4}H$;
c) Neiloid-Kegel . . . $V = G_1.\frac{27}{32}H = G_1.\frac{3}{4}H\ (1 + \frac{1}{8})$. Gilt also für alle drei gemeinsam, aber bei c) mit Erhöhung um's Achtel:

(9) V = Stärkenfläche in Drittels-Scheitelhöhe × ¾ Scheitelhöhe.

(10) Zusatz in Bezug auf die Mantelfläche **M.**

a) Beim gradseitigen Kegel mit der Grundstärke D, Mittenstärke d u. Schiefseite S, gestaltet sich dessen ausgebreiteter Mantel bekanntlich zu einem Kreissektor, dessen Radius = S u. Bogenlänge = Umfang der Grundfläche = πD (auf dem Meßknecht = U_D), dessen Mittelbogen also = $\frac{1}{2}\pi D = \pi d$ = Kegels Mittenumfang; u. dessen Fläche als Dreieck zu berechnen, genau = $U_D \times S/2$ od. $U_d \times S$ (= Mittenumfang × Seitenlänge).

b) Wegen Paraboloids-Mantel s. Brieftasche.

§ 101. Lehrbeispiele zum Meßknechtspraktikum in Sachen der vorigen Formirungs- u. Kubirungsgesetze.

1. Wenn ein unentwipfelter Stamm, oberhalb seines Wurzelanlaufs gemessen, eine Grundstärke D = 60^{cm} u. in der Mitte der oberhalb dieses Meßpunkts befindlichen Scheitelhöhe ein d = 40^{cm} besitzt: zeigt derselbe damit aufs Paraboloid hin? Antw.: Dann müßte $d = D\sqrt{\frac{1}{2}} = 60 \times 0{,}707 = 46{,}4^{c}$ sein. Sonach zeigt dieser Stamm auf eine Zwischenform des gemeinen u. parabolischen Kegels hin.

2. Kann ein Stamm mit einem D = 60^{c}, der von da an bis zur oberhalb befindlichen Viertelshöhe (Untermitte) um 20^{c} abfällt, also ein D_u = 40 besitzt, wenigstens bis dahin als neiloidisch angesehen werden? — Antw.: Laut vorig. §, Regel 2, müßte sein $D_u = 0{,}65.60 = 39^{c}$; also wäre fraglr. Stamm bis zur Viertelshöhe nur um ein weniges vollformiger als der Neiloid'sche Wuchs erheischt.

3. Ein Erdhaufen od. Meiler, der als Paraboloid angesprochen werden könnte, weil sein mittlerer Durchmesser = $\frac{7}{10}$ des untersten und auch der in ¾ Höhe = dem halben untersten nahe genug war, hat wieviel Rauminhalt, wenn seine Grundfläche ein D von 8,2 Meter u. seine Höhe H = 6 Meter? — $V = Kr.8{,}2^{m} \times 3^{m}$, lt. linker D-Spalte = 52,8 . 3 = 158,4 Cub^{m}. —



Fig. 31.

Etwas genauer als $\frac{Kr.\,24{,}6}{9}.3 = \frac{Kr.\,24{,}6^{m}}{3} = \frac{475{,}5}{3} = 158{,}5$ Cub^{m}.

4. Ein unentwipfelter Stamm von 20^{m} Länge u. 30^{cm} Mittenstärke enthält, jenachdem seine Formirung a) (parabolisch-) ausgebaucht oder b) gradseitig oder c) (neiloidisch-) eingebaucht, welches Volum nach metr. Scheiten od. Cubicmeter-

hundertel d. i. Prismen von 1^m Länge u. 1 $Deci^{m.}$ Dicke u. Breite? — Antw.: Da laut Knechts linker D-Spalte *Kr.* $30^c = 7{,}075\ \square^{decim.}$, so folgt nach Regel 3 des vorig. §:

a) $V = 7{,}075 \times 20^m = 141{,}5$ Scheite od. 1,415 $Cub^{m.}$;

b) $V =$ vorig. $V + \frac{1}{3}$ desselben $= 141{,}5 + 47{,}2 = 188{,}7^s$ od. $1{,}887\ C^{m.}$;

c) $V =$ erstem $V_a \times 2 = 141{,}5 \times 2 = 283^s$ od. $2{,}83\ C^m$.

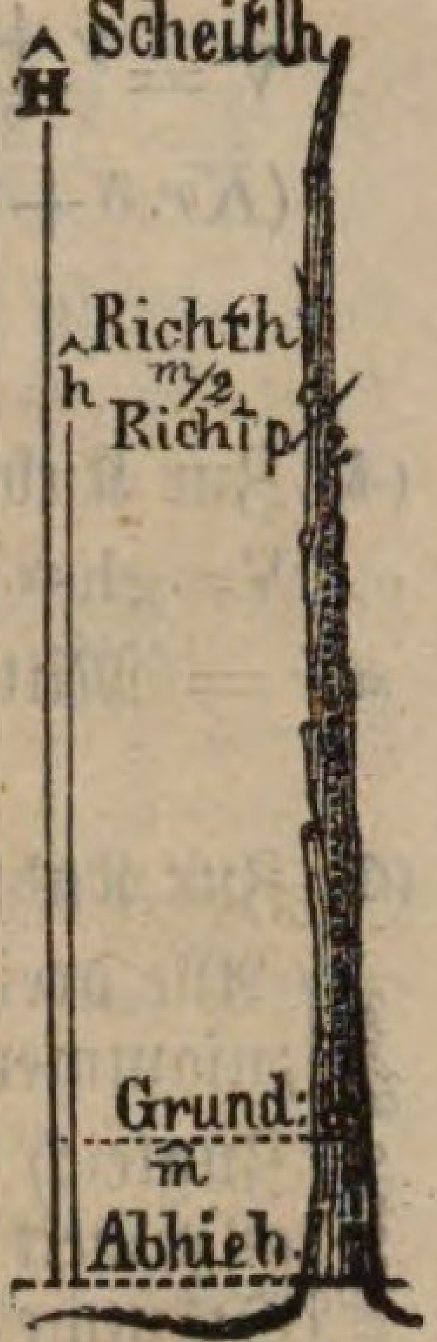


Fig. 32.

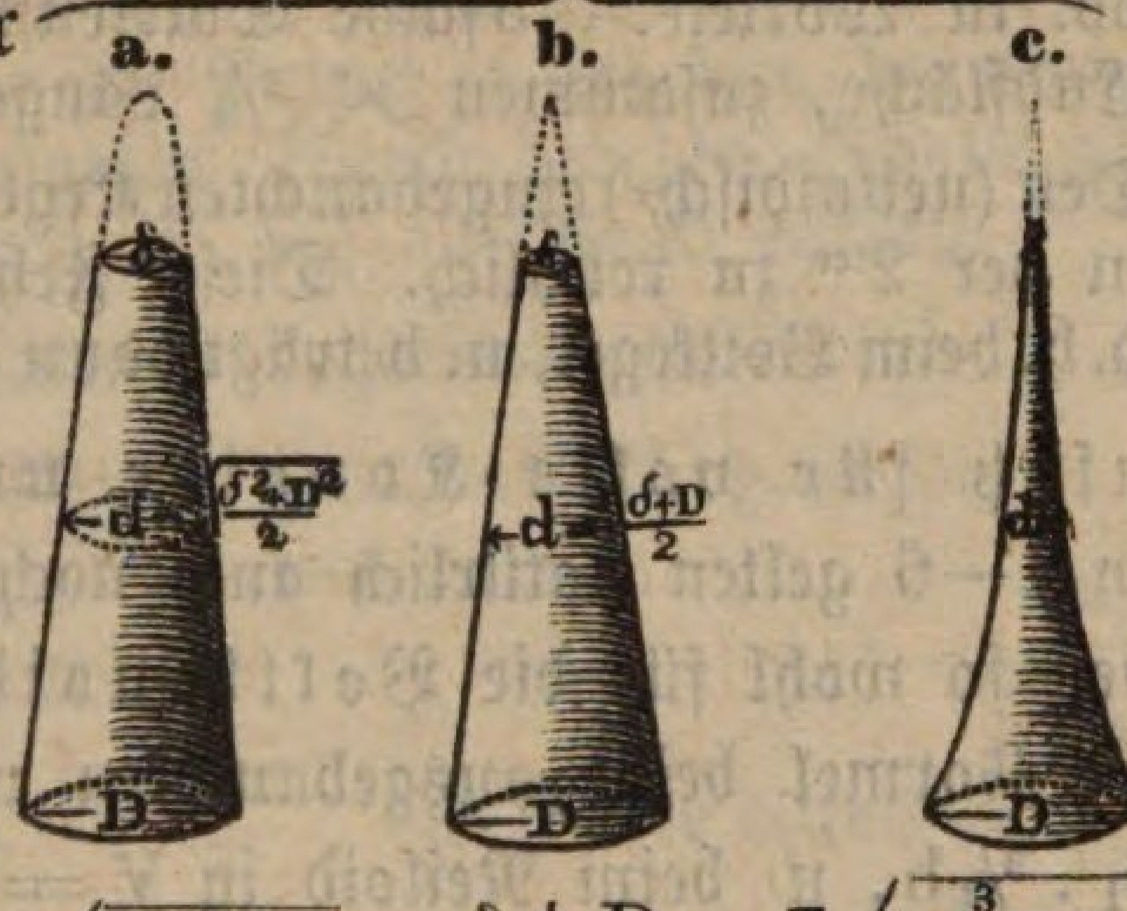
5. Ein stehender Stamm von 30^c Grundstärke u. 15^m zugehör. Richthöhe, gleichviel ob bis zum Scheitel einachsig od. ein- od. zweimal gegabelt (S. 50), u. gleichviel, ob voll- od. abholzig geformt, enthält bis zum Wipfel wieviel Scheite? Lt. Regel 7 . . . $V =$ *Kr.* $30^c \times 10^m = 7{,}075\ \square^{dm} \times 10^m = 70{,}75$ Scheite od. $0{,}7075\ C^m$.

6. Ein nicht eingebaucht sonst aber gleichviel ob voll- od. abholzig gewachsener Stamm ward vom Knecht in seiner Eigenschaft als Hypsometer zu 24^m hoch u. dann vom Knecht in ähnlicher Weise der Punkt der Drittelshöhe (8^m) konstatirt, und hiernach dieses Ortes Durchm. (etwa durch Herunterlothen) zu 28^c ermittelt. Wie groß hiernach sein Inhalt? — Da laut linker D-Spalte *Kr.* $28^c = 6{,}16\ \square^{decim.}$, folgt laut Regel 9 . . . $V = 6{,}16 \times 18 = 110{,}9$ Scht. od. $1{,}109\ C^m$.

7. Der Mantel eines gemein. Kegels von $H = 60^{cm}$ Höhe und $D = 40^{cm}$ Grundstärke hat welche Fläche? . . . Da die S. S die Hypotenuse zu H u. $\frac{1}{2}$ D, folgl. $S = \sqrt{60^2 + 20^2} = \sqrt{4000}$; lt. Knecht $= 63{,}3$; und der Umf. am Grunde zum $D = 40$ laut U-Skala $= 125{,}7$, so folgt: Fraglicher Kegelmantel ist ein Sektor von 63,3 Rad. u. 125,7 Bogenlänge und somit von $63{,}3 \times 125{,}7 \times \frac{1}{2} = 3978\ \square^{cm}$ Fläche. — Wäre auch nach dieses Sektors Oeffnung od. Centrumswinkel gefragt, so hätte man zunächst für den Radius 1 dessen Bogenlänge $= 1257 : 633 = 1{,}985$, der in Knechts Bog.-Skala bei 198,5 auf $113\frac{3}{4}°$ zeigt.

Fig. 33.

Die drei Kegelstumpfe; u. zwar § 102.



a) Das gestutzte Paraboloid oder (parobol.) ausgebauchte Klotz;

b) Der gestutzte gemeine Kegel od. das gradseitige Klotz;

c) Das gestutzte Neiloid oder (neilisch-) eingebauchte Klotz.

$$d = \sqrt{\frac{\delta^2 + D^2}{2}};\ = \frac{\delta + D}{2};\ = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{\delta^2} + \sqrt[3]{D^2}}{2}\right)^3}$$

Bezeichnet h des Stumpfes Höhe u. Länge, D u. G die Stärke (Drchm.) u. Stärkenfläche am Grunde oder überhaupt am stärkern Ende, d u. g das nämliche in der Mitte u. δ u. γ am schwächern Ende; sowie *Kr.* D, *Kr.* d, *Kr.* δ die Kreisflächen zu den Durchm. D, d u. δ u. V das Volumen oder den Körpergehalt, so lassen sich im weitern Verfolg der auf S. 47 behandelten Gesetze unschwer auch die folgenden begründen. (Siehe die desfallsige Anleitung u. Entwickelung in den §§ 107—109.)

a) Paraboloiden-St.	b) Gemeiner Stumpf.	c) Neiloiden-Stumpf.
(1) **Mittenfläche g:**		
$g = \frac{\gamma + G}{2}$	$g = \left(\frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{G}}{2}\right)^2$	$g = \left(\frac{\sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{G}}{2}\right)^3$.
(2) **Mittenstärke d:**		
$d = \sqrt{\frac{\delta^2 + D^2}{2}}$	$d = \frac{\delta + D}{2}$	$d = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{\delta^2} + \sqrt[3]{D^2}}{2}\right)^3}$ oder
also g = geglichene Endfläche	d = geglichene Endstärke	$d = \frac{1}{8}\left(\delta^{2/3} + D^{2/3}\right)^{3/2}$.

a) Paraboloiden-St.	b) Gemeiner Stumpf.	c) Neiloiden-Stumpf.
(3) Zur Kubirung aus den Endstärken:		
$V = \frac{\gamma + G}{2} h$; oder $(Kr.\delta + Kr.D)\, h/_2$	$V = (\gamma + G + \sqrt{\gamma G})\, h/_3$ $= \left[Kr.\left(\frac{D+\delta}{2}\right) + \frac{Kr.(D-\delta)}{12}\right] h$ $= \left[Kr.\delta + Kr.D + Kr.(\delta + D)\right] \frac{h}{6}$	$V = \left[\gamma + G + (\sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{G})\sqrt[3]{\gamma G}\right] \frac{h}{6}$ $= \left[\gamma + G + {}^1/_2(\sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{G})^3\right] \frac{h}{6}$
(4) Zur Kubirung aus der Mittenstärke (Mittenwalzmethode):		
$V = gh$ od. $Kr.d \times h$ also = Mittenwalze.	$V = \left[Kr.d + {}^1/_{12} Kr.(D-\delta)\right] h$ also = Mittenwalze plus $^1/_{12}$ Walze d. Endstärk.-Differenz.	V . . aus d hier nur mit bedeutender Modifikation durchs δ u. D u. darum werthlos.

(5) Zur Kubirung aus drei Stärken: (d. i. aus beiden End- nebst Mittenstärke)

Simpson's Regel. Alle drei zusammen genau durch $V = \frac{\gamma + 4g + G}{6} h$ od. $(Kr.\delta + Kr.D + Kr.2\,d)\frac{h}{6}$.
Zugleich vorzüglichste Näherungsregel für alle Zwischen- und nicht allzuweit abliegende Extrem-Formen; u. somit auch die sicherste für abgewipfelte Stämme u. Klötzer mit unbestimmter Ein- u. Ausbauchung, dafern man deren V nicht aus noch mehr als drei Stärken ableiten will (s. § 105).

(6) Zur Kubirung aus der Stärke bei Drittelslänge nebst der entgegengesetzten Endstärke. —

Hossfeld's Regel. Theilt man des Stumpfes Länge od. Höhe h in 3 gleiche Theile u. bezeichnet die bei $h/3$ Entfernung v. G resp. v. γ vorfindl. Stärke u. Fläche mit D_1 u. G_1 resp. δ_1 u. γ_1, so gilt auch:

a) u. b) Für den Parab.- u. gem. Stumpf gleichzeitig $V = \frac{3G_1 + \gamma}{4} h$ od. $\frac{3\gamma_1 + G}{4} h$, od. in Worten: „3fache Stärkenfläche bei Drittelslänge + entgegengesetzte Endfläche, zusammen $\times$ $^1/_4$ Länge;

c) Den (neiloidisch-) eingebauchten Kegel kubirt diese Regel in der 1. Form zu knapp, in der 2ten zu reichlich. Dieser Fehler erreicht sein Maximum, wenn $\gamma = 0$, d. h. beim Vollkegel, u. beträgt dann $^1/_{36}$ der Grundwalze GH. (Beweis s. § 109.)

(7) Zusatz für volle Konoide und stehende Stämme. Sämmtliche Formeln 1—6 gelten natürlich auch noch, wenn γ allmälig in Null od. G übergeht, d. h. eben so wohl für die Vollkonoide als für die Walze. Für erstere würde Hoßfeld's Formel beim ausgebauchten u. gradseitigen Kegel sich vereinfachen in $V = G_1 \cdot {}^3/_4 h$, u. beim Neiloid in $V = (G_1 \cdot {}^3/_4 h)\, 1^1/_8$. Würde es möglich sein, bei stehenden Stämmen von der Scheitelhöhe H den Durchm. D, bei der Höhe $H/_3$ umstandslos genau genug zu messen, so könnte man aus dieser Regel in der Form

a) u. b) Voll- bis abholzige Stämme, d. h. solche, die ihren Richtpkt. in der Ober- bis Hauptmitte haben (s. S. 47 flg.) } V = Stamminhalt v. Abhieb bis zum Wipfel = Kreisfläche in Drittels-Scheitelhöhe $\times$ $\times$ Dreiviertels-Scheitelhöhe.

c) Sehr abholzige, mit dem Richtpunkt zwischen halber und Drittelshöhe } V = vorigem Produkt plus einem Zusatz, der bei tiefster Richtpunktslage bis zu $^1/_8$ jenes Produkts ansteigt,

eine nicht unwillkommene Kubirungspraxis für stehende Hölzer ableiten. Man bedenke jedoch, daß ein Fehler von $^1/_2$″ od. $^1/_2{}^c$ im D, einen Massenfehler von reichlich $100/D$ % zur Folge haben muß; $^1/_2$″ bei einem D = 12″ also einen Fehler von $8^1/_2$ %; weshalb die aus einer unmittelbar meßbaren (Grund-) Stärke arbeitende Richtpunktspraxis (S. 49) zu derlei Zwecken für gewöhnlich weitaus den Vorzug verdient.

(8) Zusatz für die Mantelfläche des gradseitigen Kegelstumpfes. Dieselbe ist laut § 100, 10. = einem Ringsektor od. = einem Trapez, dessen Grundlinie ein Kreisbogen von der (aus der U-Skala abzulesenden) Länge πD, u. dessen Mittellinie = πd u. Decklinie = $\pi \delta$ u. Nebenseite wie Höhe = Seitenlinie des Stumpfes. Sonach = Mittenumfang $\times$ Kegelseite. Zum Paraboloiden-Stumpf s. Brieftasche.

Lehrbeispiele zum Meßknechtspraktikum in Sachen der § 103.
vorigen Formirungs- u. Kubirungslehren.

1. Welche Mittenstärke d müßte ein Klotz von $\delta = 40$ Cent Ober- u. D = 80 Cent Unterstärke haben, wenn es genau parabolisch ausgebaucht sein sollte? — Laut Regel 2 u. mit einstweilen 10fach verkleinert. Werthen ... $d = \sqrt{\frac{4^2+8^2}{2}} = \sqrt{40}$, laut Qw.-Spalte des Knechts = 6,32 ca.; also reichl. 63^c.

2. Ein Klotz vom Wurzelende eines Stammes hatte bei 31,34 Cent untrer und 21,85 Cent obrer Stärke in der Mitte **25,15** Cent. Man soll angeben, ob oder in wie weit diese Einbauchung eine neiloidische ist? — *)

Erste Auflösung. Mittels Meßknechts Wurzeltafel. Laut § 102, 2. müßte bei einem $\delta = 21{,}85$ u. einem $D = 31{,}34$ sein das mittl. $d = \sqrt{\left(\frac{\sqrt[3]{\delta^2} + \sqrt[3]{D^2}}{2}\right)^3}$. Indem wir δ u. D in der Qw.-Spalte aufsuchen u. zwar als 218_5 u. 313_4 lesen wir dabei ab: $\delta^2 = 477{,}4$ u. $D^2 = 982{,}3$. Und indem wir gleichzeitig mit diesen Quadraten in die Z-Spalte gehen u. dazu aus der Cw.-Spalte die Cubicwurzel ablesen, finden wir daselbst $\sqrt[3]{477{,}4} = 7{,}815$ u. $\sqrt[3]{982{,}3} = 9{,}940$; also deren halbe Summe = 8,777. Diese ist laut Formel wieder zu kubiren, was die Cw.-Spalte bei 887_7 laut Z = 699_5 bis 699_7 bewirkt und auch gleich dazu an selbiger Stelle der Qw.-Spalte die Quadratwurzel gibt und damit das gefragte d = **26,45** und damit die Antwort: daß obige Einbauchung gegen die exact neiloidische etwas zu grell sei, u. zwar um 1,3^c od. um ca. 5%.

Zweite Auflösung. Flüchtiger noch, blos durch Potenzirung d. i. durch Combination der Qw.- u. Cw.-Spalte, in der Form $d = \left(\frac{\delta^{2/3} + D^{2/3}}{2}\right)^{3/2}$. — Indem wir δ u. D als 218_5 u. 313_4 in der Qw.-Spalte aufsuchen, lesen wir gegenüber in der Cw.-Spalte dazu sofort deren $^2/_3$te Potenzen als 781_5 u. 994_0, d. i. mit Rücksicht auf den wahren Werth v. δ u. D als 7,815 u. 7,940, u. so deren halbe Summe = 8,877. Und um diese auf die $^3/_2$te Potenz zu erheben, hat man dieselbe in der Cw.-Spalte aufzusuchen u. den zugehör. Werth der Qw.-Spalte abzulesen, der sich als 264_5 mithin (als $^3/_2$te Potenz v. 8, 2c.) als 26,45 erweist.

Dritte Auflösung. Durch Meßknechts Logarithmentafel:

Für $\sqrt[3]{21{,}85^2}$ folgt: Log. 21,85 = 1,33945; für $\sqrt[3]{31{,}34^2}$? Log. 31,34 = 1,49610

2,67890 (^{2}	2,99220 (^{2}
^{3}) 0,89297	^{3}) 0,99740
wozu der Num. = 7,816.	wozu der Num. = 9,940.

Folglich (7,816 + 9,940) = 8,878; u. für $\sqrt{8{,}878^3}$.. folgt: Log. 8,878 = 0,94832

2,84496 (^{3}
^{2}) 1,42248
wozu der Num. = **26,450.**

3. Ein Klotz von 6^m Länge mit 40^c obrer und 60^c untrer Stärke hat welchen Inhalt? — Wenn es parabolisch ausgebaucht (lt. § 102, 3.) $V = (Kr. 40^c + Kr. 60^c)\, 3^m$; beim D = 4,0 u. 6,0 gesucht, gibt (12,6 + 28,3) □^{dm} . 3^m = **92,7** Scheite od. **0,927** Cub^m. — Wenn es aber gradseitig war, dann lt. Regel 3 richtiger als $V = (Kr. 50 + {}^1/_{12}\, Kr. 20)\, 6 =$ = (19,6 + 0,26) □^{dm} × 6^m = 19,86 . 6 = **119,2** Scheit od. **1,192** Cub^m.

4. Ein gradseitiges Bierglas von 12^c Tiefe u. 8^c obrer u. 10^c untrer Weite faßt wieviele Cub^{cm}? — Laut Regel 3 = $(Kr. 8 + Kr. 10 + Kr. 18)\ {}^{12}/_6$ = (50,2 + 78,5 + 254,5) 2 = 383,2 × 2 = 766 Cub^{cm}.

5. Ein Haufen od. Bottich od. dgl., der wie beistehend die Form eines ausgebauchten Konoidenstumpfes u. zwar nach dem Gesetze der parabol. Ausbauchung (Regel 2) und dabei 3^m Höhe mit 2,3^m untrer u. 1,8^m obrer Weite zeigt, enthält wieviel Hektoliter? (1 Cub^m = 1000 Liter =

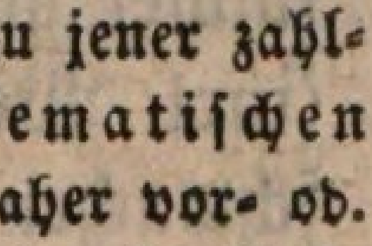


Fig. 34.

*) Dies Beispiel gehört gleich dem Beispiel 2 in § 99 ganz vorzugsweise mit zu jener zahlreichen Klasse, welche absichts der Uebung u. Werthschätzung einer intensivern mathematischen Technik in Schule wie Praxis erzieherisch zu wirken vermag. Man löse es daher vor- od. nachher, u. mit der Uhr zur Seite auch ein viertes Mal ohne alle Tafeln auf, also durchs bloße Multipliciren u. Radiciren.

10 Hectoliter) – Laut Formel 3 . . V = (*Kr.* 1,8 + *Kr.* 2,3) 2/3; was des Knechtes linke D-Spalte bei 18 u. 23 auflöst in (2,545 + 4,155) 3/2 = 10,05 C^m = = 100,5 Hektoliter.

6. Ein entwipfelter Stamm von 20^m Länge u. 32^{cm} Mittenstärke hat muthmaslich welchen Inhalt? — Da lt. Knechts link. D-Sp. *Kr.* 32^{cm} = 8,05 □-Dec.^{m}, so folgt V = 8,05 . 50 = 161 Scheit od. 1,61 Cub.^{m}; u. zwar genau: wenn der Stamm parabol. ausgebaucht ist; zu knapp: wenn er gradseitig („abholzig"), um das 12^{tel} der Walze der Endstärkendifferenz. War also $\delta = 20^c$ u. D = 44^{cm}, Diff. als 24^c, so ist vorig. Resultat zu klein um (*Kr.* 24^c) $20^m/_{12}$ = 4,52 $□^{dm}$. $^5/_3$ = = 7,5 Scheit od. 0,075 C^m od. um fast 5 %. — War der Stamm gar eingebaucht, so wäre das Deficit erheblich größer.

7. Ein werthvolles 10^m langes Eichenklotz vom Wurzelende, unten 108^c, oben 42^c u. in der Mitte 61^c stark, hat muthmaslich welchen Inhalt? — Nach (Simpson's) Regel 5 . . V = (*Kr.* 42 + *Kr.* 108 + *Kr.* 122) 10/6, was nach Knechts link. D-Sp. bei 4,2 u. 10,8 u. 12,2 = (13,8 + 91,8 + 116,9) 5/3 Scheit = 372,5 Sch. od. 3,725 C^m.

§ 104. **Der gewöhnliche Faßraum:** besteht aus zwei mehr u. minder ausgebauchten Kegelstumpfen, die mit ihrem größten Durchm. D des Fasses Mittenweite oder Spundtiefe bilden u. mit ihrem kleinsten δ dessen Bodenweite; und kubirt sich demgemäs, wenn h des Fasses Achsenlänge u. d sein Durchm. in der Viertelslänge, d. i. in der Mitte zwischen Spund u. Boden bedeutet und selbstredend alles im Lichten d. i. excl. Holzdicke genommen ist:

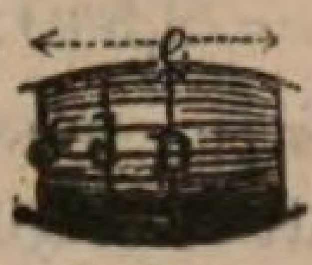


Fig. 35.

(1) Annähernd nach § 102, Frml. 3a . . . V = (*Kr.* δ + *Kr.* D) $^h/_2$ = arithm. Mittel aus der betreffenden größten u. kleinsten Walze.

(2) Genauer nach Formel 4a (u. 4b), weil diese der unter- od. über-parabolischen Ausbauchung besser Rechnung trägt . . .

V = (*Kr.* d) h = Walze mit dem Durchm. zwischen Spund u. Zapfen.

(3) Noch genauer, nach (Simpson's) Frml. 5 . . . V = (*Kr.* δ + *Kr.* D + *Kr.* 2 d) $^h/_6$.

(4) Nach Stampfer soll man die verschiedenen Faßformen durchschnittlich am besten treffen durch die empirische Formel } V = (*Kr.* D) × 0,907 h d. i. nahe 91 % der Mittenwalze.

Beispiel. Ein Weinfaß zeigt im Lichten, also ohne die Holzdicke, eine Länge von h = $1,86^m$ (Meter) bei einer Bodenweite δ = $0,635^m$, Spundtiefe D = 0,698 u. dazwischen oder bei der Viertelslänge ein d = 0,675. Wie würde jede der vorstehenden 4 Regeln, dessen Inhalt nach Litern (1000 = 1 Cub.^{m}) ausgedrückt, ergeben? Man suche erst alle 3 Kreisflächen; u. zwar, indem man deren Durchm. als Deci-Meter ausdrückt u. sonach zum δ = 6,35; d = 6,75 u. D = 6,98 aus Meßknechts *Kr.*-Spalte die Kreisfläche als Quadrat-Meter abliest; also zwischen 6 u. 7 der linken D-Spalte: *Kr.* 6,35 = $0,31_6$; *Kr.* 6,75 = $0,35_6$; *Kr.* 6,98 = $0,38_3$. Daraus folgt:

Nach Regel **1.** $V = (0,316 + 0,383) \times \frac{1,86}{2} = 0,650\ C^m$ = **650** Liter. —

„ „ **2.** $V = 0,356 \times 1,86 = 0,662\ C^m$ = **662** Liter.

„ „ **3.** $V = (0,316 + 0,383 + 4 . 0,356) . \frac{1,86}{6} = 0,659\ C^m$ = **659** Liter.

„ „ **4.** $V = 0,383 \times 1,86 \times 0,907 = 6,46\ C^m$ = **646** Liter.

§ 105. **Das beliebig aus- u. eingebauchte Konoid.** Simpson's erweiterte Körperregel (insbesondre zur genauesten Bloch- und Stammkubirung).

Theilt man die Länge eines wie vorbemerkten Konoids in eine gerade Anzahl gleicher Sektionen von solcher Kürze a, daß je zwei u. zwei zusammen immer genau genug einen der in § 102 aufgeführten Konoidenstumpfe bilden (incl. Walze u. Vollkonoid; s. 7. § 102), u. bezeichnet man, am besten vom schwachen Ende abgerechnet, die aufeinanderfolgenden Stärkenflächen der Sectionsgrenzen mit g_1, g_2, g_3 . . g_n; wo dann g_1 u. g_n zugleich die beiden

Endflächen des ganzen Konoids bedeuten u. der Index n stets eine ungerade Ziffer sein muß, so folgt aus fortgesetzter Anwendung der Formel 5 v. § 102 leicht (s. Beweis in § 109, 10.):

(1) $\left[(g_1 + g_n) + (g_3 + g_5 + g_7 \ldots) 2 + (g_2 + g_4 + g_6 \ldots) 4\right] . {}^a/_3$

(2) od. in Worten { Erste u. letzte der Stärkenflächen einfach / alle ungradstelligen . . . in Sa. doppelt / alle gradstelligen . . . . " " vierfach } Summa-Summarum × ⅓ Sectionslänge.

Und hieraus:

Regel zur genauern Stammkubirung bei unbestimmter Ein- u. Ausbauchung: Ziehe vom starken Ende her über die ganze Stammlänge ein entspr. Meßband, theile von dort ab den Stamm in 1 Meter (od. 3 Fß.) lange Sektionen und schließe zunächst mit der letzten gradziffrigen (z. B. 18ten od. 20ten) Sektion ab; indem man, was jenseits derselben liegt, selbständig für sich nach einer der Regeln des § 102 bemißt u. berechnet. Miß hierauf mittels Kluppe oder Baumzirkel*) und mit den nöthigen Vorsichten (außer den zum ausfallenden Endstücke nöthigen 3 Stärken) von oben her die Stärken aller Grenzpunkte über's Kreuz und möglichst bis auf's Zehntelzoll genau, schreibe sie mit ihrem Stellenzeiger, deren letzter also ein ungrader sein muß, tabellarisch untereinander, und daneben dann die aus der Kreistafel abgelesenen Stärkenflächen, darunter dann deren drei (durch partielles An- u. Ausstreichen) nach Regel 2 gebildeten ein-, zwei- u. vierfachen Summen, u. multiplicire deren Schlußsumme mit ⅓ der Sektionslänge; also, wenn letztre 1 Meter: dividire die in □-Meter ausgedrückte Summe durch 3.**)

Zusätze u. Beispiele zur genauen sectionsweisen Stammkubirung des vorigen §. § 106.

1. Zur Vergleichung der Simpson'schen u. der Mittenwalz-Regel. Außer nach der vorstehenden Simpson'schen, kann man selbstredend den in Sektionen getheilten oder getheilt gedachten Stamm auch nach der Mittenwalz-Methode kubiren. Dort werden die Stärken der Sektionen an ihren Grenzen, hier in ihrer Mitte gemessen; wenn dabei keine eingebauchten vorkommen, arbeitet letztre fast ganz eben so genau und ist natürlich dann glatter u. einfacher. Denn erstens hat man dabei einfach nur zu allen derlei gemessenen Mittenstärken die Kreisflächen zu suchen und deren Summe mit der Sektionslänge zu multipliciren; zweitens findet dabei nicht die Beschränkung statt, daß die Anzahl der Sektionen eine gerade sein müsse; auch gestattet das Mittenwalzprincip drittens die oft sehr vortheilhafte Freiheit, den Stamm in verschieden lange Sektionen zu theilen, z. B. um Sektionen mit recht regelmäßigen runden Mittenpartien zu erhalten; und viertens kann bei Zuwachsuntersuchungen oder bei Schlüssen von der jetzigen Masse zur frühern jede solche Mittenstärke direkter u. auch selbständiger, selbst für jede Sektion allein, benutzt werden. — Wenn bei der einen oder andern Methode der Stärkenmeßpunkt auf Astwülze oder sonst wie abnorme Stellen fällt, hat man an regelmäßigrer Stelle etwas ober- u. unterhalb zu messen und daraus das Mittel zu nehmen.

2. Bei wirklicher Stammsecirung zur genauen Zuwachserforschung, d. i. zur Kubirung der jetzigen u. einer od. mehrer früheren Altersstufen eines Stammes, durchsäge man daher dieselben in der Mitte jeder 1m langen Sektion, also zuerst bei ½ Meter über dem Abhiebspunkte und dann von Meter zu Meter, wo dann zur letzten Querfläche noch ½m jenseits liegende Stammlänge gehört. Aus den Jahrringen dieser Stärkenflächen lassen sich dann für frühere Alters-

*) S. Verf.'s „Holzkubirer" 2. u. 3. Aufl. 1866 u. 1869, S. 47—52.

**) Vergleichende Erfahrungsbeispiele s. in „Weitere Erläuterungen" im vorbemerkten Holzcubirer 2. u. 3. Aufl.

stufen nicht blos deren Mittenstärken, sondern auch deren Scheitelhöhen (durch unverfängliche Interpolation) ableiten. Aus der jetzigen Masse M und der um n Jahre jüngeren m folgt dann für die betreffende Periode:

$$\text{Durchschnittlr. Jahreszuw.: im } \begin{Bmatrix}\text{Massen-}\\ \text{satze}\end{Bmatrix} = \frac{M-m}{n}\text{; im } \begin{Bmatrix}\text{Procent-}\\ \text{satze}\end{Bmatrix}\ p = \left(\sqrt[n]{\frac{M}{m}} - 1\right) 100$$

$$\text{od. letztern im Näherungswege } p = \frac{M-m}{M+m} \cdot \frac{200}{n} \text{ d. i. } \frac{\text{Differenz}}{\text{Summe}} \cdot \frac{200}{n}.$$

3. Die vorige Zuwachsuntersuchung ohne Stammzerschneidung: Spalte in Gedanken den Stamm vom Wipfel bis zur Wurzel mittels einer längs durch die Achse gelegten Ebene (Meridianebene) in zwei congruente Hälften; miß in jeder Sektionsmitte nur den Durchmesser dieser Meridianebene u. ergründe an dessen beiden Enden mit dem Zuwachsbohrer*) die dasigen früheren Stärken. Uebrigens wie oben. (Der Bohrer gewöhnlicher Construction arbeitet bis 6, zur Noth auch 7 Centimeter Tiefe oder 12—14 Cent Durchmesserzuwachs; längere Weichholzbohrer auch bis zum Doppelten, u. somit bis 24 Cent Durchmesserzuw.)

4. Beispiel zur Simpson'schen Regel. Wenn der aus acht doppelmetrigen Sektionen gebildete und somit 16^m lange Theil $d_1 \ldots d_g$ des Stammes Fig. 36 die folgenden Stärken in Cent (od. Dezimalzollen) u. aus dem Knechte dazu abgelesene Stärkenflächen ergab, so ist sein Inhalt?

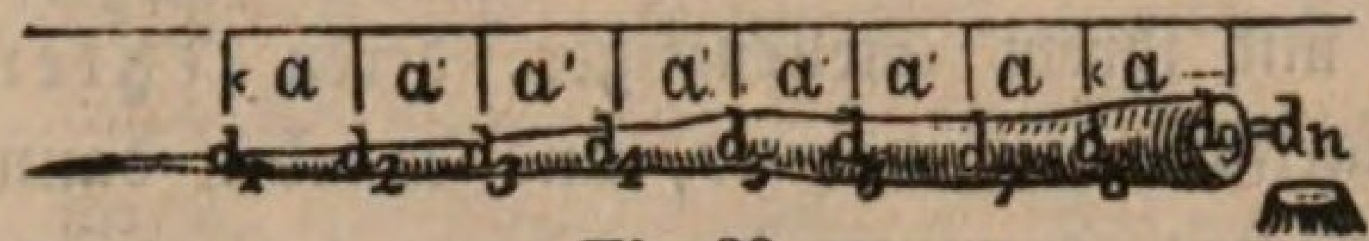


Fig 36.

$d_1 = 6{,}1^c$	$Kr.\ d_1 = 0{,}292$ □-Deci^m	
$d_2 = 7{,}9$	„ $d_2 = 0{,}490$	„
$d_3 = 9{,}8$	„ $d_3 = 0{,}754$	„
$d_4 = 12{,}3$	„ $d_4 = 1{,}188$	„
$d_5 = 15{,}1$	„ $d_5 = 1{,}791$	„
$d_6 = 16{,}8$	„ $d_6 = 2{,}217$	„
$d_7 = 18{,}0$	„ $d_7 = 2{,}545$	„
$d_8 = 20{,}3$	„ $d_8 = 3{,}237$	„
$d_9 = 22{,}5$	„ $d_9 = 3{,}975$	„

So folgt nun weiter nach Regel 2, § 105.

0,292	0,754	0,490	4,267
3,975	1,791	1,188	10,180
4,267	2,545	2,217	28,528
	5,090	3,237	42,975 □^{dm}
	10,180 (2	7,132	
		28,528 (4	

$$V = 42{,}975\ \square^{dm} \times {}^2/_3{}^m = 28{,}65 \text{ Scheit}^{**})$$
oder 0,2865 Cub^m.

*) S. Verf.'s Schriftchen „Zur Forstzuwachskunde" od. „Rat. Forstwirth" Heft 7, 1867; od. auch „Forstliches Hülfsbuch" 2. Aufl. 1869..

**) Wie vorn schon bemerkt: 1 metr. Scheit = einem Prisma von 1 □-Decimeter Grundfläche und 1 Meter Länge. Näheres hierüber s. Verf.'s „Forsttaxator" 4. Aufl. 1869, oder auch dessen „Forst- u. bauwirthschaftliche Supplementstafeln" (S. 40) 3. Aufl. 1869.

Anhang zu Kapitel 8.

Zur Begründung der im vorstehenden Kapitel aufgestellten Gesetze u. Regeln.

Im Allgemeinen u. für die vollen Pyramidal- u. Kegelformen: § 107.
s. die Begründung der Bildungsgesetze, Formverhältnisse u. Kubirungsregeln derselben im Kap. 4, S. 47—49.

In Absicht auf deren Stutze aber gelangt man bei weitrer Anwendung jener Bildungsgesetze, nach ganz einfacher Proportions- u. Gleichungslehre, zu folgenden Werthen; worinnen bedeutet: G die untere oder Grund- u. γ die obere od. Deck- u. g die Mitten-Stärkenfläche, sowie G_1 die in Drittelshöhe von unten u. γ_1 in der Drittelshöhe von oben ab; und D, δ, d u. D_1 u. δ_1 die entspr. homologen Dimensionen, bei kreisförmiger Querfläche also deren Durchmesser; endlich h die Höhe des Stumpfes, h_1 deren Ergänzung zur entspr. Voll-Höhe H ($= h + h_1$) u. V des Stumpfes Volumen od. Körperinhalt.

a) Für den parabolisch-ausgebauchten Stutz.

Aus $h_1 : h_1 + h = \gamma : G$ folgt (1) $h_1 = \frac{\gamma}{G-\gamma} h$ u. (2) $H = \frac{G}{G-\gamma} h$. — Und gleicher Art aus $h_1 : h_1 + h/2 = \gamma : g$ durch Einsetzen vorig. Werthe (3) $g = \frac{G+\gamma}{2}$. Ebenso aus $h_1 : h_1 + 2/3\, h = \gamma : G_1$ (4) $G_1 = \frac{2G+\gamma}{3}$ u. aus $h_1 : h_1 + h/3 = \gamma : \gamma_1$ (5) $\gamma_1 = \frac{2\gamma + G}{3}$. — Laut S. 48 muß nun sein: $V = \frac{GH - \gamma h_1}{2}$, d. h. durch Einsatz obiger Höhenwerthe: $V = \frac{G^2-\gamma^2}{G-\gamma} \cdot h/2$, woraus leicht (6) $V = \frac{G+\gamma}{2} h$ u. nach Formel 3 dann (7) $V = \gamma h$. — Um Formel 6 in die Simpson'sche Regel überzuführen, rechnet man $V = \frac{3G + 3\gamma}{6} h = (G + 4\frac{G+\gamma}{2} + \gamma)\, h/6$, was nach F. 3 soviel heißt als (8) $V = (G + 4g + \gamma)\, h/6$. Und insofern aus Formel 4 u. 5 folgt: $G = \frac{3G_1 - \gamma}{2}$ u. $\gamma = \frac{3\gamma_1 - G}{2}$ erhält man durch Substitution dieser Werthe in Formel 6 die Hoßfeld'sche Regel (9) $V = \frac{3G_1 + \gamma}{4} h$ od. $\frac{3\gamma_1 + G}{4} h$.

Fortsetzung. (Buchstabenbedeutung wie in § 107.) § 108.

b) Für den gemeinen oder gradseitigen Stutz.

Auf ganz genau demselben Wege, nur mit dem Unterschiede, daß man laut S. 49 statt des Verhältnisses der Flächen überall das Dimensionsverhältniß, also statt $\gamma : G$ nun $\delta : D$ od. $\sqrt{\gamma} : \sqrt{G}$ od. $\gamma^{1/2} : G^{1/2}$ zu setzen hat, erhält man:

(1) $$h_1 = \frac{\sqrt{\gamma}}{\sqrt{G} - \sqrt{\gamma}} h; = \frac{\gamma^{1/2}}{G^{1/2} - \gamma^{1/2}} h; = \frac{\delta}{D-\delta} h.$$

(2) $$H = \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G} - \sqrt{\gamma}} h; = \frac{G^{1/2}}{G^{1/2} - \gamma^{1/2}}; \quad = \frac{D}{D-\delta} h.$$

(3) $$\sqrt{g} = \frac{\sqrt{G} + \sqrt{\gamma}}{2} \text{ u. } g = \frac{G + \gamma + 2\sqrt{G\gamma}}{4}; \; d = \frac{D+\delta}{2}.$$

(4) $$\sqrt{G_1} = \frac{2\sqrt{G} + \sqrt{\gamma}}{3}, \text{ woraus } G_1 = \frac{4G + \gamma + 4\sqrt{G\gamma}}{9}.$$

(5) $$\sqrt{\gamma_1} = \frac{2\sqrt{\gamma} + \sqrt{G}}{3}, \text{ woraus } \gamma_1 = \frac{4\gamma + G + 4\sqrt{\gamma G}}{9}.$$

Insofern nun, wie Seite 48 bewiesen, $V = \frac{GH - \gamma h_1}{3}$, was durch Einsetzung der Werthe aus F. 1 u. 2 übergeht in: $h/_3 \left[G \cdot \frac{G^{1/2}}{G-\gamma} - \gamma \cdot \frac{\gamma^{1/2}}{G-\gamma}\right] = h/_3 \left[\frac{G^{3/2} - \gamma^{3/2}}{G-\gamma}\right]$, so folgt weiter daraus durch algebraische Division

(6) $V = (G + \gamma + \sqrt{G\gamma})\, h/_3$.

Insofern aber letztres auch $= \frac{(3G + 3\gamma + 6\sqrt{G\gamma}) + (G + \gamma - 2\sqrt{G\gamma})}{12} \cdot h$ und dies $= \frac{3(\sqrt{G} + \sqrt{\gamma})^2 + (\sqrt{G} - \sqrt{\gamma})^2}{12} h = \left(\frac{\sqrt{G} - \sqrt{\gamma}}{2}\right)^2 h + (\sqrt{G} - \sqrt{\gamma})^2 \cdot \frac{h}{12}$, so ist dies laut Formel 3 ebensoviel als

(7a) $V = gh + (\sqrt{G} - \sqrt{\gamma})^2 \cdot \frac{h}{12}$. Speciell für den Kegel, bei dem $g = \pi/_4 d^2$, $G = \pi/_4 D^2$, $\gamma = \pi/_4 \delta^2$ u. $d = \underline{D + \delta}/_2$, ist diese Formel leicht übergeführt in

(7b) $V = \pi/_4 d^2 \cdot h + \pi/_4 (D - \delta)^2 \cdot \frac{h}{12}$ d. i. = Mittenwalze (oder Walze der geglichenen Endstärken) plus $^1/_{12}$ Walze der Endstärkendifferenz. —

Die Simpson'sche Regel aber ergibt sich einfach, indem man aus F. 3 den Werth für $\sqrt{G\gamma} = \frac{4g - G - \gamma}{2}$ in Formel 6 einsetzt, wodurch diese sofort übergeht in

(8) $V = (G + 4g + \gamma)\, h/_6$. — Und eben so leicht die Hoßfeld'sche, wenn man Formel 4 od. 5 auf $\sqrt{G\gamma}$ reduzirt u. diesen Ausdruck in Formel 6 substituirt. Z. B. aus Formel 4 ... $\sqrt{G\gamma} = \frac{9G_1 - 4G - \gamma}{4}$, und damit aus Formel 6 ... $V = (G + \gamma + \frac{9G_1 - 4G - \gamma}{4})\, h/_3 = \frac{9G_1 + 3\gamma}{4} \cdot h/_3$, d. i.

(9a) $V = \frac{3G_1 + \gamma}{4} h$. Und ebenso (9b) $V = \frac{3\gamma_1 + G}{4} h$.

§ 109. **Fortsetzung.** (Buchstabenbedeutung wie in § 107.)

c) **Für den neiloidisch-eingebauchten Stutz und für die freie Combination aller drei Konoiden** (d. i. für Simpson's erweiterte Körperregel).

Indem laut S. 47 ꝛc. beim Neiloid $\gamma : G = h_1^3 : (h_1 + h)^3$ od. $\sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{G} = h_1 : (h_1 + h)$ od. $\delta^{2/3} : D^{2/3} = h_1 : (h_1 + h)$ u. somit auch $\sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{g} = h_1 : (h_1 + h/_2)$ und $\sqrt[3]{\gamma} : \sqrt[3]{G_1} = h_1 : (h_1 + {}^2/_3 h)$, so folgt aus derlei Proportionen, eben so einfach wie vorher durch bloße Gleichungsreduktion:

(1) $h_1 = \frac{\sqrt[3]{\gamma}}{\sqrt[3]{G} - \sqrt[3]{\gamma}} h; = \frac{\sqrt[3]{\delta^2}}{\sqrt[3]{D^2} - \sqrt[3]{\delta^2}} h$. (2) $H = \frac{\sqrt[3]{G}}{\sqrt[3]{G} - \sqrt[3]{\gamma}} h; = \frac{\sqrt[3]{D^2}}{\sqrt[3]{D^2} - \sqrt[3]{\delta^2}} h$.

(3) $\sqrt[3]{g} = \frac{\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{\gamma}}{2}$; $g = {}^1/_8 (\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{\gamma})^3 = \frac{G + \gamma + 3\sqrt[3]{G\gamma}(\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{\gamma})}{8}$;

und aus vorstehend zweiter ... $d = \sqrt{{}^1/_8 (\sqrt[3]{D^2} + \sqrt[3]{\delta^2})^3}$.

(4) $\sqrt[3]{G_1} = \frac{2\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{\gamma}}{3}$ woraus $G_1 = \frac{8G + \gamma + 6\sqrt[3]{G\gamma}(2\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{\gamma})}{27}$.

(5) $\sqrt[3]{\gamma_1} = \frac{2\sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{G}}{3}$, $\gamma_1 = \frac{8\gamma + G + 6\sqrt[3]{G\gamma}(2\sqrt[3]{\gamma} + \sqrt[3]{G})}{27}$.

Laut S. 49 ist nun $V = \frac{GH - \gamma h_1}{4}$. Durch Einsetzung der Werthe h_1 u. H aus Formel 1 u. 2, wobei wir vor der Hand statt $\sqrt[3]{\gamma}$ 2c. das bekanntlich gleichbedeutende $\gamma^{1/3}$ 2c. setzen, geht dieser Ausdruck über in

$$V = \frac{G \,.\, G^{1/3} - \gamma \,.\, \gamma^{1/3}}{G^{1/3} - \gamma^{1/3}} \,.\, h/_4 = \frac{G^{4/3} - \gamma^{4/3}}{G^{1/3} - \gamma^{1/3}} \,.\, h/_4 = \frac{(G^{2/3} + \gamma^{2/3})(G^{2/3} - \gamma^{2/3})}{G^{1/3} - \gamma^{1/3}} \,.\, h/_4 =$$

$$= \frac{(G^{2/3} + \gamma^{2/3})(G^{1/3} + \gamma^{1/3})(G^{1/3} - \gamma^{1/3})}{G^{1/3} - \gamma^{1/3}} \,.\, h/_4 = (G^{2/3} + \gamma^{2/3})(G^{1/3} + \gamma^{1/3}) \,.\, h/_4 =$$

$$= \left[G + G^{1/3}\gamma^{2/3} + G^{2/3}\gamma^{1/3} + \gamma)\right] h/_4 = \left[G + \gamma + G^{1/3}\gamma^{1/3}(\gamma^{1/3} + G^{1/3})\right] h/_4 \text{ od.}$$

(6) $V = \left[G + \gamma + \sqrt[3]{G\gamma}\,(\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{\gamma})\right] h/_4$. Woraus durch Multiplikation mit $\frac{3}{3}$ und Zerlegung in $(2\,G + 2\gamma + G + \gamma + 3\sqrt[3]{G^2\gamma} + 3\sqrt[3]{\gamma^2 G})\, h/_{12}$ auch folgt

(7) $V = \left[G + \gamma + {}^1/_2(\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{\gamma})^3\right] h/_6$; was aber nach F. 3 ebensoviel bedeutet als

(8) $V = \left[G + \gamma + 4\,g\right] h/_6$; also zum dritten Male die Simpson'sche Formel. —

Daß die Mittenstärke od. Mittenwalze selbständiger beim eingebauchten Stutz nicht anwendbar sein kann, folgt schon aus Formel 7 des § 108. Der Fehler $\varkappa$, den man mit $V = gh$ begehen würde, findet sich, wenn man $gh + \varkappa =$ Formel 7 setzt, woraus mit Bezug auf Formel 3 dann

$$\varkappa = \left[\frac{G + \gamma}{2} - \left(\frac{\sqrt[3]{G} + \sqrt[3]{\gamma}}{2}\right)^3\right] h/_3 = \frac{G + \gamma - 2\,g}{6}\, h;$$

um welchen Werth die Mittenwalze gh zu vergrößern wäre, um den Neiloidenstumpf zu treffen.

(9) Eben so wenig wie die reine Mitten- ist auf's Neiloid die Hoßfeld'sche Formel anwendbar. Als $\frac{3\,G_1 + \gamma}{4}\, h$ gibt sie den Inhalt zu klein u. als $\frac{3\,\gamma_1 + G}{4}\, h$ zu groß; ein Fehler, der für's volle Konoid sein Maximum erreicht u. dabei $^1/_{36}$ GH beträgt. Indem z. B. bei dem Uebergang von h in H u. von γ in Null aus Formel 4 folgt $G_1 = {}^8/_{27}\, G$, gestaltet sich Hoßfeld's Rechnung aus dem untern Drittel als:
$V_1 = \frac{3 \,.\, {}^8/_{27}\, G + 0}{4}\, H = {}^2/_9\, GH.$ Da nun das genaue V (s. § 100) $= {}^1/_4\, GH$, folgt $V = 1{}^1/_8\, V_1$; was soviel heißt als: mehre das Hoßfeld'sche Produkt um sein Achtel od. um $^1/_{36}$ der Grundwalze GH.

(10) Simpson's erweiterte Körperregel. Bilden je 2 u. 2 der gleichlangen Sektionen genau genug den einen od. andern der drei Konoidenstumpfe (incl. Walze u. Vollkonoid), so folgt für beistehend abgegrenzten 8 Sektionen, deren aufeinanderfolgenden Endflächen wir mit g_1, g_2, g_3 bezeichnen,



Fig. 37.

Volumen

der Sekt. 1 u. 2 $= (g_1 + 4\,g_2 + g_3)\, {}^{2a}/_6$
" " 3 u. 4 $= (g_3 + 4\,g_4 + g_5)\, {}^{2a}/_6$
" " 5 u. 6 $= (g_5 + 4\,g_6 + g_7)\, {}^{2a}/_6$
" " 7 u. 9 $= (g_7 + 4\,g_8 + g_9)\, {}^{2a}/_6$

In Summa also V =

$$\left.\begin{array}{c} (g_1 + g_9) \\ + \\ 2\,(g_3 + g_5 + g_7) \\ + \\ 4\,(g_2 + g_4 + g_6 + g_8) \end{array}\right\} \times {}^a/_3$$

Kap. 9. Zur Sphären- u. Sphäroidenlehre.

A. Kleine Vorschule.

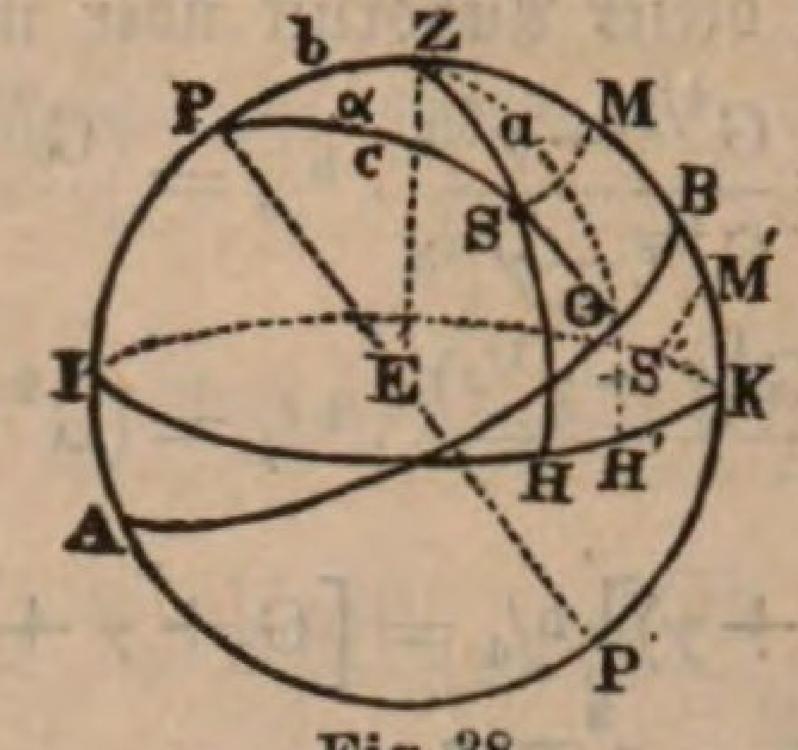
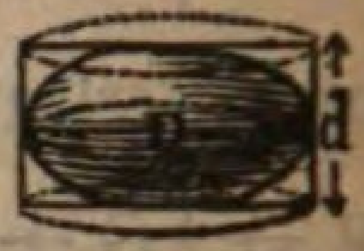


Fig. 38.


Fig. 39.


Fig. 40.


Fig. 41.


Fig. 42.

§ 110. **Für die Kugel oder Sphäre im Allgemeinen.**

1. Absichts dieser wichtigen Form und ihrer vielfach interessanten Gesetze sin für unsre engern Zwecke hauptsächlich folgende in nähere Erwägung u. Anwendun zu bringen, deren wesentlicher Kern sich zum Theil in jedem stereometrischen Lehr buche und zum Theil ergänzend am Schlusse dieses Kapitels begründet findet.

2. Es sei **r** der Radius u. **d** der Durchm. der Kugel, folglich auch d zugleic Durchmesser u. Höhe des umschriebenen Cylinders (Fig. 39) u. der Umkreis zu d. i. $U_d = \pi d$ = Umfang jedes mit seiner Ebene durch das Kugelcentrum gehende sogenannten größten od. Hauptkreises (wie Fig. 38: AZKA, AB ꝛc.; JK ꝛc.; PO ꝛ ZH ꝛc.), den wir kurzweg „Kugelumfang" nennen wollen. Da wie jeder Kreis so auch alle diese Hauptkreise auf allen ihren Radien senkrecht, letztre aber zugleic Kugelradien sind, so erklärt sich, warum diese Kreise mit ihren Ebenen die Kugel oberfläche senkrecht durchschneiden; die andern dagegen nicht, wie z. B. jeder mi seiner Ebene u. folglich auch seinem Umfange od. Umfangstheile SM (Fig. 38) zun Aequator AB parallel gedachte od. sogenannte „Parallelkreis"; und warum ma nur die von Hauptkreisen gebildeten Dreiecke, wie PQB od. PSZ, als eigentlich „sphärische" anerkennen kann. Ferner auch (Fig. 38): warum ein „sphärische Winkel" wie P od. α einerlei ist mit dem Durchschnittswinkel der beiden zugehör Kreisebenen, hier PBP¹ u. PQP¹, d. i. mit dem Kantenwinkel bei PP¹, u. sonac auch einerlei mit dem gemeinen ebenen Winkel, den bei P die zwei Tangente der beiden dort zusammentreffenden Bogen miteinander bilden. Und auch warum wenn Fig. 38 die Erdkugel u. PP¹ deren Rotationsachse u. AB den durch dies senkrecht gelegten Hauptkreis d. i. den Erd- (u. Himmels-)Aequator darstellt warum alle durch diese Achse gelegten Hauptkreise wie PZB u. PSQ od. (Erd u. Himmels-)Meridiane erstens den Aequator AB senkrecht durchschneiden (so da also $\angle Q = \angle B = 90^\circ$), zweitens am Aequator einen Bogen BQ abschneiden dessen Gradmas = dem $\angle \alpha$ zwischen beiden Meridianen, u. drittens sämmtlich von gleicher Länge, nämlich Quadranten oder 90 Grad lang sind.

3. Das sphärische Dreieck pflegt sonach auch in absicht seiner Seiten längen durchs Gradmas bezeichnet zu werden und zwar stets zunächst u. gewöhnlich weil es seltner auf deren absolute als relative Länge ankommt. Ist letztere = **a** Grad so ist beim Kugelradius r, laut § 90 u. 97, deren Absolutgröße bekanntlich $= 0{,}01745\ \mathbf{a}.\mathbf{r}$; oder laut Meßknechts-Bogenskala = r. Bog. a°. Wenn sonach zwei Meridiane im $\angle \alpha = 90^\circ$ von einander abstehen, bilden dieselben mit ihrem Aequator ein sphär. Dreieck, dessen drei Seiten u. drei Winkelöffnungen sämmtlich einander gleich u. zwar = 90° sind. — Unter den schönen Leistungen der sphärischen Trigonometrie bildet die Kunst, aus den (im Gradmas) gegebenen drei Seiten eines beliebigen sphärischen Dreiecks, also z. B. aus a, b u. c des Dreiecks PZS (Fig. 38), jeden beliebigen Winkel desselben, wie z. B. α, durch Rechnung abzuleiten, insofern die für uns hier wichtigste, weil sie uns ermöglicht mit einem wohljustirten Meßknechte auch ohne Stativ durch eine ziemlich einfache, kaum 3 Minuten beanspruchende (Sonnen-) Beobachtung u. Rechnung die Tageszeit bis durchschnittlich auf

die Minute zu messen und demgemäs den Stand seiner Uhren zu corrigiren.*) — Näheres über diese Praxis s. unter § 117 u. Kap. 11.

4. Jeder durch das Kugelcentrum gehende Schnitt (also jeder Hauptkreis) theilt die Kugel in zwei congruente „Hemisphären", alle andern Durchschnitte trennen eine „Calotte" od. „Kugelhaube" ab, d. i. ein Kugelsegment (Fig. 44) mit gleichfalls kreisförmiger Basis; u. je zwei beliebige Parallelkreise: eine „Kugelscheibe" od. „Kugelzone" wie Fig. 45, aufzufassen auch als ein „sphärisch-ausgebauchter Kegelstumpf". Und denkt man sich endlich zu Fig. 44 u. 45 von allen Punkten des Umkreises der Grundfläche Radien nach dem zugehörigen Kugelcentrum gelegt, so erhält man den „Kugelsektor" u. „Kugelsektorstumpf." —

Oberfläche der Kugel, Kugelhaube u. Kugelzone. (Die sphärische „Complanation.") § 111.



Fig. 43.



Fig. 44.

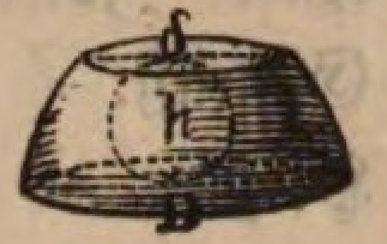


Fig. 45.

Wenn bedeutet: d den Durchm. von der Kugel, D von der Grundfläche einer Haube, sowie h die körperliche Höhe eines dgl. Segments wie auch Segmentenstumpfes, so ist (s. die Beweise in § 118)

1. Kugeloberfläche $= \pi d^2 = 4\,Kr._d$ = 4fache Fläche eines Hauptkreises oder = Kreisfläche zum doppelten d; = Meßknechts $Kr._{2d}$.

2. Hauben- od. Segmentsfläche $= \pi d h$ = Kugelumkreis $\times$ Haubenhöhe = Meßknechts $U_d \times$ Höhe h.

3. Zonenfläche od. Mantel des Kugelhaubenstumpfes od. sphärisch-ausgebauchten Kegelstumpfes: ganz wie vorige $= \pi d h$ = Kugelumkreis $\times$ Körperhöhe der Zone.

4. Hauben- u. Haubenstumpfe von gleicher Höhe sind also absichts ihrer sphärischen Außenfläche einander ganz gleich.

5. Rücksichts der Mantelfläche m des beim Kugelsektor noch hinzukommenden Centralkegels gilt nach § 100 . . $m = \pi D \,.\, {}^d/_4 = {}^\pi/_4 D d$; also mittels Meßknechts U-Skala $= {}^1/_4 \,.\, U_D \times$ Kugeldurchmesser.

Meßknechtspraktikum zu den vorigen Sätzen über sphärische Complanationen. — Bekanntlich ist der (mittl.) Durchm. der Erdkugel = 1719 geogr. Meilen u. der (mittl.) Abstand des Wendekreises vom Aequator = Abstand des Polarkreises von den Polen, ausgedrückt in Graden der Meridiane (geogr. Breitengrade) = Neigung der Ekliptik**) od. Erdbahnebene gegen die Aequatorebene = Neigung der Erdachse gegen das Loth der Ekliptik = 23,4°. (Seit 2000 J. v. Chr. von ihrem Max. = 23° 53′ stetig abnehmend bis zum J. 6600 auf das Min. 22° 54′.) Man soll hieraus u. zwar in abgerundeten Werthen so genau als es der Meßknecht gestattet, ableiten. § 112.

1. Die Gesammtoberfläche der Erde; 2. das Flächenverhältniß der drei Zonen jeder Hemisphäre und 3. die Flächengröße jeder derselben.

Zur Beantwortung von 1. Um aus dem Knechte die 4fache Kreisfläche zum d = 1719 Meil. am besten abzulesen, sucht man die Kreisfläche zum dopp. d, d. i. zu 3438 Meil. Da nun zu D = 34,38 Meil. der Knecht 928 □-Meil. gibt, so folgt fürs 100fache D (= 3438 Meil.) der 100 $\times$ 100fache Inhalt 9 280000 geogr. □-Meil. (Die genaue Größe ist bekanntlich = 9278960 □-Meil.)

Zur Beantwortung von 2. Den Radius einstweilen = 100 gesetzt, so ist die körperl. Höhe der polar. Calotte = der Bogenhöhe zu 2 $\times$ 23,4 = 46,8°;

---

*) Auch ohne alle Rechnung, wer die bei Fr. Vieweg unter dem Titel „Der Zeitmeßknecht" erschienenen desfallsigen Tabellen benutzen will. I. Theil für Süddeutschland oder die Breitengrade 46—50, II. Theil für Norddeutschland od. die Breiten 50—54°. (Zur Noth noch um 1° weiter links u. rechts durch einfache arithmetische Fortsetzung auszudehnen.)

**) ek-leipsis, gr. das Verschwinden; weil in der Nähe dieser am Firmament als Linie sich darstellenden Bahnebene die Sonnen- u. Mondfinsternisse ꝛc. stattfinden.

u. die körperl. Höhe der heißen Zone = dem Sinus von 23,4° oder der halben Chorde von 46,8°. Wir suchen also in Meßknechts Chordentafel den ∠ 46,8° und lesen dazu ab

rechts die *Bh.* . . . . . = 8,23 = Höhe der Polarzone in %ten des Erdradius.
links „ *Ch.* . . . . . = 39,71 = „ „ trop. Zone „ „ „ „
bleibt sonach 100—47,94 = 52,06 als Höhe der gemäß. Zone in % „ „

In runden Zahlen verhalten sich sonach deren Oberflächen vom Aequator abgerechnet (wie ihre Körperhöhen d. i.) wie 40 zu 52 zu 8, oder einfacher und vom Pole ab wie 2 : 13 : 10.

Zur Beantwortung von 3. Durch Multiplikation der Hemisphärenfläche (lt. oben sub 1), = 4 640000 □-Meil. mit vorigen Procentzahlen, erhält man für die drei Zonen jeder Erdhälfte, von den Polen her gerechnet

Kalte Zone rund 464 × 823 = 382000 □-Meilen.
Gemäß. „ „ 464 × 5206 = 2415000 „
Heiße „ „ 464 × 3971 = 1843000 „

§ 113. **Volumen** od. Körpergehalt der Kugel, Kugelhaube und Kugelzone. (Die sphärische Cubatur.)


Fig. 46.


Fig. 47.


Fig. 48.

Bedeutet wiederum d den Durchm. von der Kugel, D von der Grundfläche der Haube u. δ von der Deckfläche ihres Stumpfes, so gilt (s. Beweise in § 119)

1. Kugelinhalt $= \pi/_6\, d^3 = \pi/_4\, d \,.\, \frac{2d}{3} = \frac{(Kr.\, d)\, 2d}{3} = \frac{\text{Hptkreisfl.} \times \text{dopp. Durchm.}}{3}$
od. = $^2/_3$ des umschriebenen Cylinders, d. i. eines Cylinders, dessen Dicke u. Höhe = dem Kugeldurchmesser.

2. Sektor- od. Kugelkegelinhalt d. i. Körperinhalt des Segments und zugehörigen Centralkegels $= \pi/_6\, d^2 h = \frac{(Kr.\, d)\,.\, 2h}{3} = \frac{\text{Hptkreisfl.} \times \text{dopp. Calottenhöhe}}{3}$.

3. Segments- oder Haubeninhalt allein $= \pi h^2\, (^d/_2 - {}^h/_3) =$
$= \pi/_6\, h^2 (3d - 2h) = \pi/_4\, h^2 \times \frac{2(d-2h)}{3} = \frac{\text{Krsfl. zum Durchm. h,} \times \text{dopp. Diff. d} - 2h}{3}$;
eine Formel, welche sich auch in die interessante Form bringen läßt:
$\pi/_4 D^2 \,.\, {}^h/_2 + \pi/_6\, h^3$ d. i. $\frac{Kr.\, D \times h}{2} + \frac{Kr.\, h \times 2h}{3}$ = Paraboloid derselben Grundfläche u. Höhe, plus Kugel um die Höhe (d. i. Kugel mit h als Durchm.).

4. Zonen- od. Haubenstumpfes -Körperinhalt =
$= \pi/_{24}\, h\, \left[3(\delta^2 + D^2) + 4h^2\right] = \frac{Kr.\, \delta + Kr.\, D}{2} \,.\, h = \frac{Kr.\, h \times 2h}{3}$ und somit ebenfalls = entspr. Paraboloidenstumpf plus Kugel um die Höhe.

5. Gegenüber der parabol. Ausbauchung bewirkt also die sphärische, sowohl bei der haubenartigen als der konoidenstumpf- od. scheibenartigen Form ein Mehr, das interessanterweise bei beiden genau gleich der um ihre Höhe h umschrieb. Kugel.

§ 114. Meßknechtspraktikum zu vorigen Sätzen über sphärische Kubirungen.

1. Eine eiserne Vollkugel von 10^c Durchmesser, wieviel würde dieselbe wiegen, wenn nach Kap. III der Brieftasche das specif. Gewicht ihrer Masse = 7,5, also das Absolutgewicht von 1 $C^m = 7500^k$ u. von 1 $Cub^{cm} = 0{,}0075^k$ zu nehmen? Das Volumen nach Cubiccentim., als $^2/_3$ des umschrieb. Cylind. $= {}^{20}/3\ Kr. 10''$ folgt laut Knecht $= {}^{20}/3 \,.\, 78{,}5 = 523^1/_3\ C^{cm}$; somit das Gewicht nahe $= 3{,}93^k$ oder 7,9 Pfund.

2. Wie groß muß man den Durchm. eines hemisphär. Kessels angeben, wenn derselbe netto 250 Liter od. $^1/_4$ Cubicmeter fassen soll? — Antw.: Da die ganze Kugel $= \pi/_6\, d^3 = {}^1/_2\ C^m$ folgt $\pi d^3 = 3$ u. somit $d^3 = \frac{3}{3{,}1416}$ (laut Reciproken-

tafel bei 314_2) $= 0{,}31845 \cdot 3 = 0{,}95535$. Also $d = \sqrt[3]{0{,}955_3}$, welche Wurzel Knechts Cw.-Spalte ablesen läßt als $0{,}9849^m$ d. h. $d = 98\frac{1}{2}$ Centimeter.

3. Der Raumgehalt eines Meilers von $9{,}4^m$ Grundflächendurchm. u. 6^m Höhe mit sphärischer Ausbauchung ist um wieviel größer als das entspr. Paraboloid? und überhaupt wie groß? — Antwort: Größer um die Kugel des Durchmesser 6^m; $= \frac{2}{3} \cdot 6 \cdot Kr. 6 = 4\,Kr. 6 = Kr. 12$; d. i. laut Knecht $= 113{,}0$ C^m. Und das entspr. Paraboloid $= 3\,Kr.\,9{,}4$; laut Knecht $= 3 \cdot 69{,}4 = 208{,}2$ C^m. Folgt sonach als Meilerraum $208{,}2 + 113{,}0 = 321{,}2$ C^m.

4. Eine Kugelscheibe od. ein platter Konoidenstumpf mit sphärisch ausgebauchter Mantelfläche habe 30^c Dicke u. 65^c obern u. 84^c untern Durchm.; wieviel mehr Inhalt hat dieselbe gegenüber der bei gleichen Dimensionen parabolisch ausgebauchten Scheibe, u. wieviel überhaupt u. zwar nach Cubicdecimetern od. Litern? — Das sphärische Mehr ist $=$ Kugel um 30^c od. vom Durchm. $3^{dec.} = 2^d\,Kr.\,30^c =$ $= 2^d \cdot 6{,}16\,\square^d = 12{,}32$ C^d; das entspr. Paraboloid $= (Kr.\,65 + Kr.\,84)\ 14^c$, lt. Knecht bei $D = 6{,}5$ u. $8{,}4 = (33{,}2 + 55{,}4)$ Quad.$^{dec.} \times 1{,}4^{dec.} = 130{,}64$ C^d. Zusammen also $= 142{,}96$ $C^{dec.}$ oder nahe 143 Liter.

Die Kubirung der Sphäroiden (Ellipsoiden) und **das elliptische Konoid.** § 115.

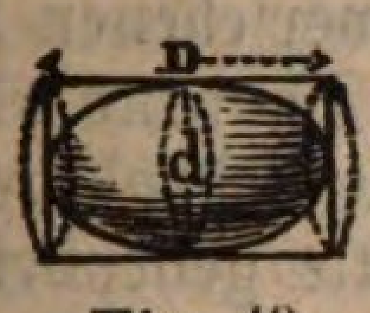
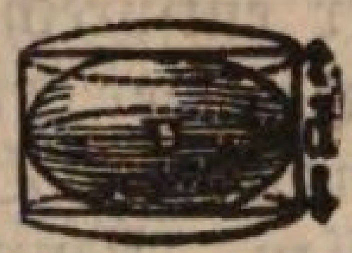

Fig. 49.


Fig. 51.


Fig. 50.

Wenn d die kleine u. D die große Achse oder der kleinste u. größte Durchm. einer Ellipse [s. § 96: d. i. einer Curve od. Fläche, deren umschriebener Kreis (vom Durchm. D) durch proportionale Verkleinerung seiner Ordinaten im Verhältniß von D zu d gedrückt, oder deren eingeschriebener Kreis (vom Durchm. d) ähnlichermaßen im Verhältniß von d zu D gedehnt worden]: so entsteht durch deren Umdrehung um D das erste oder „eiförmige“ Sphäroid (Fig. 49), dagegen um d das zweite od. „linsenförmige“ (Fig. 50). Bei jedem sind natürlich alle Schnitte senkrecht durch die Rotationsachse Kreise, aber auch nur diese, woraus sich leicht ergibt (s. § 120), daß der

1. Körperinhalt des eiförmigen $= \frac{\pi}{6}\, d^2 D = \frac{\pi}{4}\, d^2 \cdot \frac{2}{3} D = \frac{2D}{3} \cdot Kr.\, d$.

2. „ „ linsenförm. $= \frac{\pi}{6}\, D^2 d = \frac{\pi}{4}\, D^2 \cdot \frac{2}{3} d = \frac{2d}{3} \cdot Kr.\, D$; oder

3. bei jedem $= \frac{2}{3}$ des umschrieb. Cylinders, ganz wie bei der Kugel; sowie

4. daß der Körpergehalt des eiförmigen zu dem des linsenförmigen sich verhält wie $d : D$; daß also letztres genau in dem Verhältniß der kleinen zur großen Achse massenreicher ist, trotzdem, daß bei beiden der Schnitt durch die Rotationsachse genau dieselbe Erzeugungsellipse gibt.

5. Will man die im Kap. 4 u. 8 betrachteten 3 Kegelgestalten annoch durch einen vollformigern u. dabei leicht cubirbaren ergänzen: so denke man sich einen solchen als Hälfte eines entsprechend lang gestreckten eiförmigen Ellipsoids; für welches Konoid mit dergestalt elliptischer Ausbauchung (Fig. 51) nach bekanntem Ellipsengesetze*) gilt: Stärke in der Hauptmitte od. Mittenstärke $= 0{,}866$ (od. nahe 87%) der Grundstärke; in der Obermitte od. Dreiviertelshöhe $= 0{,}661$ oder beinahe $\frac{2}{3}$ der Grundstärke; Höhe des Richtpunkts d. i. Punkts der halben Grundstärke bei $0{,}866$ od. nahe 87% der Scheitelhöhe. Und der Inhalt dann, wie sub 1 angegeben $= \frac{2}{3}$ der entspr. Grundwalze $=$ Grundfläche $\times \frac{2}{3}$ Scheitelhöhe. (Die Richtpunktsregel § 100b würde also hier 13% zu knapp arbeiten; was indeß, forstlich wenigstens, ohne Bedeutung ist, da Stämme von irgend bedenklicher Annäherung an eine solche Vollholzigkeit nicht vorzukommen pflegen.)

*) Für D (hier = doppelter Kegelhöhe) als Abscissenachse u. den Scheitel als Anfang der Coordinaten, verhalten sich bekanntlich die Quadrate der letztern wie die Produkte der zugehörigen Abschnitte der großen Achse.

Beispiel. Den Kubikgehalt nach Litern (Cub$^{dec.}$) anzugeben, den man erhält, wenn man eine Ellipse von 1^m Länge u. $\frac{1}{2}^m$ Breite a) um die große Achse und b) um die kleine rotiren läßt. Nach Satz 4 müssen sich beide Räume a : b wie $\frac{1}{2} : 1 = 1 : 2$ verhalten, das linsenförm. wird also grad doppelt so groß; und zwar

a) $= \frac{2}{3}$ umschr. Cyl. $= \frac{2}{3}^m\, Kr.\, \frac{1}{2}^m = \frac{20^d}{3} \times Kr.\, 5^d = \frac{20^d}{3} \times 19{,}6\, \square^d = \mathbf{131}$ Lit.

b) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}^m\, Kr.\, 1^m = \frac{10^d}{3} \times Kr.\, 10^d = \frac{10}{3} \cdot 78{,}5 = \mathbf{262}$ Liter.

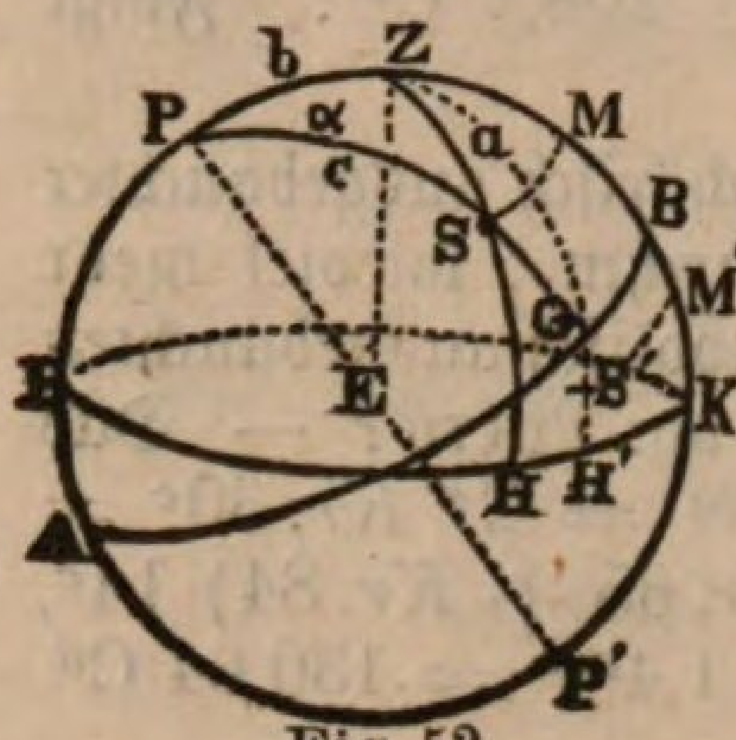


Fig. 52.

§ 116. **Das sphärische Dreieck aufzulösen, das der Anwendung des Meßknechts als Sonnenuhr oder der Zeitberechnung aus gemessenen Sonnenhöhen zu Grunde liegt. Allgemeiner: Aus den 3 gegebenen Seiten a, b u. c eines beliebigen sphärischen Dreiecks irgend einen seiner Winkel, hier den (Stunden-) Winkel α od. P, abzuleiten.**

A. Astronomische Vorschule.

1. Man erinnere sich zunächst des in § 110 sub 3 Bemerkten u. denke, es sei AZP die scheinbare Himmelskugel, deren Mittelpunkt die Erde E, und PP^1 u. AB deren bis an dies Himmelsgewölbe verlängerte Achse u. Aequatorebene; P der Nord- u. P^1 der Südpol. Statt des Buchstaben E denke man sich nun die Erde in Gestalt einer entsprechend kleinen, mit ganz analogen Linien versehenen Kugel und auf derselben in der (hier nördlichen) Breite b^1 einen Ort (z. B. Tharand od. Dresden mit fast genau 51° Breite), dessen verlängerter Lothfaden od. Erdradius EZ; wo dann Z dessen „Zenith"*) und JK dessen durch die Erdmitte gehender Horizont bedeutet; während PQ ein beliebiger Meridian, dagegen der andre PZB, durch das Zenith Z (von Tharand) gehend, bekanntlich zugleich Mittagskreis ist. Bedeutet nämlich S den Stand der Sonne am Himmel u. MS ein Stück ihrer täglichen Bahn (ein Parallelkreis zum Aequator) u. sonach BM = QS deren „Declination" (Abweichung oder Abstand der Sonne vom Aequator) und KM deren „Höhe" (über dem Horizont JK) im Meridian u. HS deren Höhe zu einem andern Tagespunkte, der im Vergleich zum Mittagskreise PZB um den „Stundenwinkel α" entweder früher oder (wie laut Figur hier, weil S rechts vom Meridian) später liegt: so folgt weiter hieraus, und zwar zunächst für Orte der nördlichen Hemisphäre:

2. Wegen Neigung der Erdachse gegen das Loth der Erdbahn um 23° 28′ erscheint die Sonne bei ihrer jährlichen Bewegung um die Himmelskugel (in deren 2 × 23° 28′ breiten Sternbilder- u. Thierkreiszone allmälig auf- u. absteigend) am 21/22ten Juni in ebensoviel Abstand d. i. in 23,47° über dem Aequator als am 21/22ten December unter demselben; während sie bei dieser ihrer jährlichen Declinationsänderung den Aequator durchschneidet am 20/21ten März und 22/23ten September. D. h.: Im nördlichen Sommer ist die Declination nördlich (= BM = QS), im Winter südlich (= $MB^1 = QS^1$); gegen Ende März u. Sptbr. = Null. — Vom Mittag des 22. Sptbr. des einen bis Mittag 22. Sptbr. des folg. Jahres kann die Sonne nicht wieder genau an demselben Himmelspunkte (März u. Sptbr. genau im Aeq.) stehen, weil sie zu diesem jährln. Himmelsumlaufe nicht netto 365 sondern 365,2425 Tage braucht u. deshalb alle 4 Jahre ein Schaltjahr mit 366 Tagen kommen muß (Julianischer Kalender; alle ca. 100 Jahre aber statt dieses Schaltjahres ein gemeines mit 365 T.: Verbesserter od. Gregorianischer Kalender). Daraus entstehen für den Kalender durchschnittliche Schwankungen von ca. ½ Tag ab u. zu, die sich in obigem Doppeldatum (21. od. 22. Juni ꝛc.) aussprechen müssen.

Diese Declination der Sonne ist für jeden Tag nach ihrem Mittelwerthe aus Kap. II der Brieftasche oder aus der entspr. Tafel im unten folgenden Kap. 11 leicht abzunehmen.

3. Wenn die Sonne bei ihrer täglichen Bewegung, im (nördl.) Sommer als MS ꝛc., im Winter als M^1S^1 ꝛc., in den Meridian des betreff. Orts E oder dessen Zeniths Z kommt, theilt sie damit die Zeit von ihrem wahren Auf- zum Untergang in zwei gleiche Hälften u. zeigt damit den wahren Mittag u. den höchsten Stand über den Horizont für diesen Tag; denn stets ist (im Sommer) Sonnen-

---

*) Vermuthlich vom arab. semt-ur-râs d. i. Weg des Kopfes oder Kopflinie.

höhe KM größer als HS und (im Winter) KM^1 größer als H^1S^1. — Und je 1 Grad des Stundenwinkels α (od. Bogens MS od. BQ od. M^1S^1), um welchen der Sonnenstand links od. rechts vom Meridian des betr. Orts sich zeigt, bedeutet sonach $^1/_{360}$ des tägl. Sonnen-Umlaufes, also $= {}^1/_{360}$ Tag od. 4 Minuten vor od. nach dem wahren Mittag. — Wenn also z. B. durch den Meßknecht beobachtet u. berechnet wäre: der $\angle \alpha = 37{,}3^0$, so heißt das, in Zeit übersetzt: Entfernung vom wahren Mittag $= 37{,}3 \times 4 = 149{,}2$ Zeitminuten $= 2$ Stunden $29^2/_5$ Min.; oder, jenachdem die Beobachtung Nachmittags od. Vormittags geschah, $= 2$ Uhr 29 Min. Nachmittags oder 12—2 St. 29 M. $= 9$ Uhr 31 Min. Vormittags u. zwar: wahre Zeit.

4. Da die Erde sich um die Sonne nicht in einem Kreise sondern einer Ellipse u. zwar in einem verschiedenen Abstande von der Sonne von im Minimum 20,53 u. im Max. 21,23 (im Mittel also 20,88) Millionen geogr. Meilen u. demzufolge auch mit nicht gleicher Geschwindigkeit bewegt, so ist das dadurch bedingte Fortrücken der Sonne (von rechts nach links) in der Thierkreiszone (od. Ekliptik) zu gewissen Zeiten schneller (im Winter) u. langsamer (im Sommer) als das mittlere. Die Zeit von einem wahren Mittag zum andern ist demzufolge im ersten Falle ein wenig größer, im andern ein wenig kürzer als deren Mittelwerth vom ganzen Jahre. Eine während eines gemeinen Jahres vom 1. Januar Mittags bis 1. Januar Mittags exact 365 Doppelumläufe machende Uhr kann demzufolge gegen den wahren Mittag bis um $16^1/_4$ Minute differiren. Da nun jener gleichförmige mittlere Uhrengang für die bürgerliche Zeit als die masgeblichere zu betrachten, ist für jede nach einer Sonnenuhr und somit auch für die durch den Meßknecht bestimmte „wahre“ Zeit eine Ausgleichung auf mittlere Zeit nöthig, durch „plus od. minus 0 bis $16^1/_4$ Minuten“, welche Werthe od. Reduktion man die Zeit(aus)gleichung nennt u. aus Kap. 11 (u. Kap. II der Brieftasche) abzulesen ist.

5. Für den betr. Erdort E od. Zenithpunkt Z u. zugehör. Horizont JK (Fig. 53) heißt Bogen JP die Polhöhe u. PZ die Pol-Zenithdistanz. Liegt nun E u. Z in einem Parallelkreise, der um B-Grad vom Aequator A^1R^1 absteht, also in der geogr. Breite $RZ = B^0$, so folgt aus $RP = RZ + b = 90^0$ und $JZ = JP + b = 90$, daß $RZ = JP = B^0$ od. daß die Polhöhe eines Ortes gleich dessen geogr. Breite; d. h.: die Seite **b** des sphär. Dreiecks **PZS** ist $= 90^0$ minus geogr. Breite des Beobachtungsortes. Und da, wenn S die Sonne u. O der Horizontalpkt. ihres Höhenkreises und somit $SH = H$ ihre (mit dem Knechte beobachtete) Höhe, ZS deren Zenithdistanz u. $ZO = 90^0$, so folgt zweitens: Zenithdistanz der Sonne d. i. die dem Stunden-$\angle \alpha$ opponirte Seite **h** des sphär. Δ's **PZS**, $= 90^0$ minus Sonnenhöhe des Beobachtungsmoments, während die Poldistanz der Sonne $= PS$, im (nördl.) Winter PS^1, $=$ dritte Seite **d** des Δ's $PSZ = 90^0 \mp$ Deklination **D**; wo das obere Zeichen für den Sommer, das untere für den Winter gilt. Wenn es der sphär. Trigonometrie also möglich ist, aus diesen 3 Seiten b, d u. h den Winkel α zu berechnen, so wäre damit das Problem gelöst: durch Beobachtung der Sonnenhöhe, etwa wie nebenstehende Figur andeutet, die wahre und damit auch die mittlere Zeit des Beobachtungsmoments zu finden.

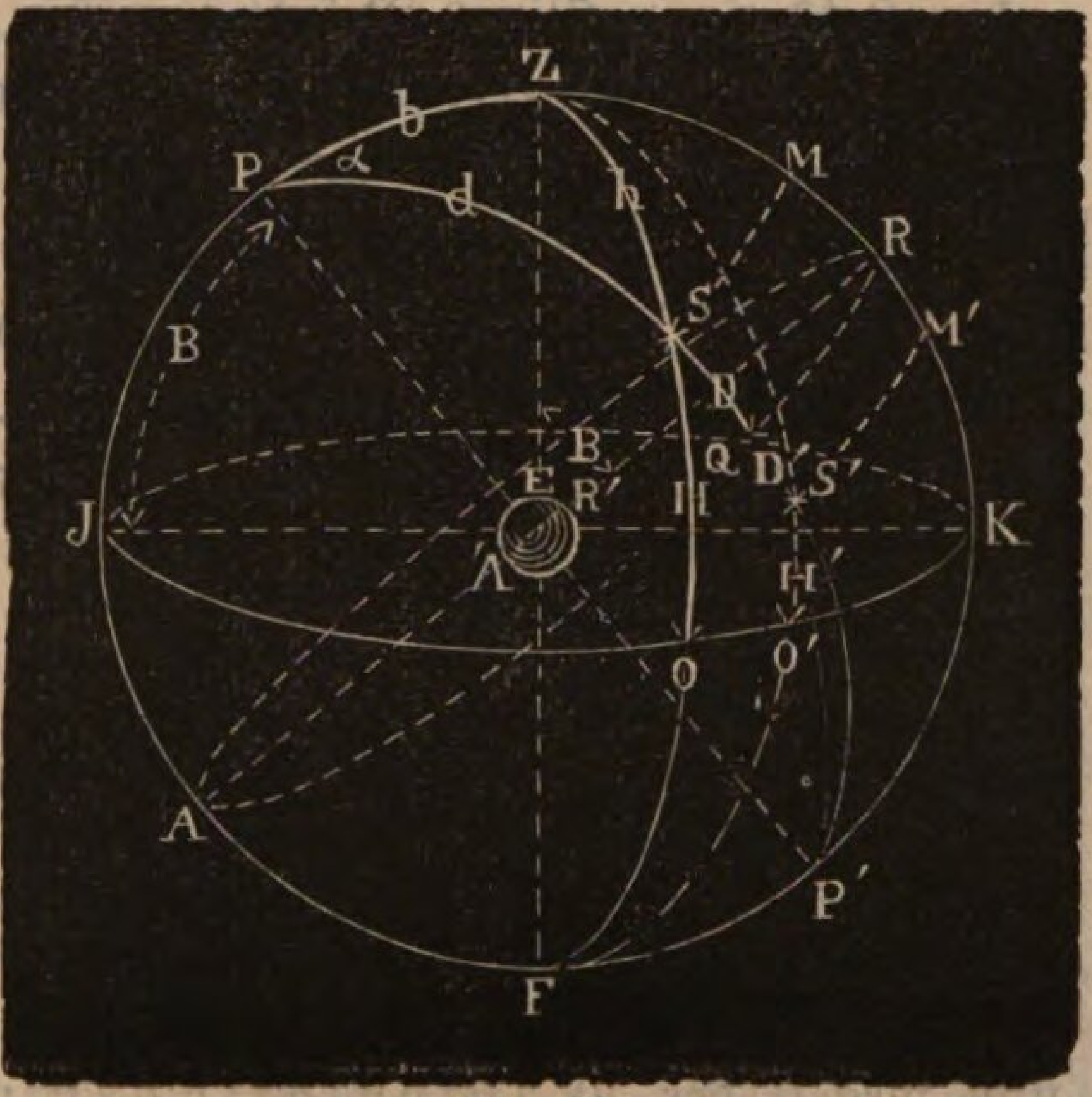


Fig. 53.


Fig. 54.

Das sphärische Dreieck zur Zeitmessung ꝛc. (Fortsetzung.) § 117.

Sind wie vorgedacht (Fig. 53) die drei Seiten des fragln. Dreiecks PZS (im Sommer-) od. PZS^1 (im Winterhalbjahr) festgestellt, etwa bis auf's Zehntel- od. Halbzehntel-Grad, so läßt sich weiter nun auch noch mittels

Meßknecht der zugehörige Stunden- od. Polwinkel α od. P berechnen u. zwar nach der einen od. andern der folgenden trigonometrischen Formeln, in denen, gleichviel ob nördlich od. südlich, bedeutet

H die mittels Meßknecht beobachtete **Sonnenhöhe** u. **h** deren Complement, $= 90 - H$,
B die geogr. **Breite** (Polhöhe) des betr. Beob.-Orts u. **b** „ „ $= 90 - B$,
D die **Declination** des betreffenden Tages . . u. **d** „ „ $= 90 - D$,
und $s = h + b + d$ d. i. die Summe der 3 Dreiecksseiten. Alles in Gradmas.

Und in welchen Formeln bei Doppelzeichen stets das obere Zeichen für das Sommer-, das untere für das Winterhalbjahr gilt.

(1) $\cos. P = \frac{\cos. h \mp \cos. b \cos. d}{\sin. b \sin. d}$; oder (2) $\cos. P = \frac{\sin. H \mp \sin. B \sin. D}{\cos. B \cos. D}$

(3) $\left.\begin{matrix}\cos. P \text{ oder } \sin. \\ \text{des Compl. v. P}\end{matrix}\right\} = \frac{\sin. H \mp \sin. B \sin. D}{\sin.(90-B) \sin.(90-D)}$ (4) $\cos. {}^{P}/_{2} = \sqrt{\frac{\sin. {}^{s}/_{2} \times \sin. ({}^{s}/_{2} - h)}{\sin. b \sin. d}}$

(5) $\sin. {}^{P}/_{2} = \sqrt{\frac{\sin. ({}^{s}/_{2} - b) \sin. ({}^{s}/_{2} - d)}{\sin. b \sin. d}}$. Für alle dann: Wahre Zeit $= 4$ P Minuten od. $P/_{15}$ Stunden vor od. nach 12 Uhr.

Jede dieser Formeln hat ihre Berechtigung: Nr. 1 arbeitet nur mit den Complementen der Grundwerthe B, D u. H und Nr. 2 nur mit letztern; beide aber gleichzeitig mit der Sinus- u. Cosinus-Skala; wogegen Nr. 3 u. 5 nur mit der Sinusskala allein arbeitet. Und während 1, 2 u. 3 für die elementare, eignen sich 4 u. 5 vortheilhafter zur logarithmischen Berechnung (wozu man dann die Sinuswerthe für Winkel bis 60° zweckmäsig stets aus der Chordentafel des Knechts ablesen wird. Vgl. S. 54 u. 60.). Beide letztre Formeln geben stets ein positives Resultat. Die erstern drei können aber auch einen negativen *cos.* P ergeben, was dann soviel heißt, daß für diesen Fall nicht der mittels *Cos.*-Spalte aufgesuchte Winkel P sondern dessen Supplement $180 - P$ gemeint ist. — (Siehe S. 56 u. § 82 6.)

Für das feinere Meßknechts-Praktikum, d. i. hier für die Benutzung seiner combinirten Chordentafel (*Ch.* u. *Bh.* s. S. 53 flg.), lassen sich einige dieser Formeln vortheilhaft umgestalten, indem man einen Hülfswinkel $x = 180 - 2\alpha$ od. $180 - 2P$ einführt, wo dann aus 3 folgt:

(6) $Ch. x = \frac{2(2\, Ch. 2H \mp Ch. 2B \times Ch. 2D)}{Ch.(180-2B) \times Ch.(180-2D)}$

od., da $180 - 2D$ meist die Tafel überscheitet

(7) $Ch. x = \frac{2\, Ch. 2H \mp Ch. 2B \times Ch. 2D}{Ch.(180-2B)\ (1 - Bh. 2D)}$

Und dann aus dem mittels Chordentafel abgelesenen Winkel x: „Wahre Zeit“ = vormitt. / nachmitt. **6 Uhr $\frac{+}{-}$ 2 x Minuten.**

Wegen Begründung dieser Formeln s. die §§ 121—123; und wegen der Manipulationen u. dem Genauigkeitsgrade bei der Meßknechts-Zeitmessung, ingleichen auch wegen Zeitgleichung od. Verwandlung der wahren Zeit in mittlere: s. sub Kap. 11.

Beispiel zu Formel 3: Nur mittels Meßknechts Sinusskala od. linkem Kreisrande zu berechnen, welche (zunächst wahre) Zeit es in Tharand war, als daselbst am 15. Juni vormittags der Knecht die Sonnenhöhe zu netto 28° erwies? Antw.: Da Tharands geogr. B laut Landkarte $= 51{,}05°$ (genau genug auch $= 51°$), ferner laut Kap. 11 die Declination am 15. Juni $= D = 23{,}21°$, sonach also $H = 28°$ u. $h = 90 - 28 = 62°$; $B = 51{,}05°$ u. $b = 90 - 51{,}05 = 38{,}95°$; $D = 23{,}21°$ u. $d = 90 - 23{,}21 = 66{,}79°$: so folgt:
Cosinus des fraglichen Stunden-Winkels P oder *Sinus* seines Complements $=$
$\frac{\sin. 28° - \sin. 51{,}05° \sin. 23{,}21°}{\sin. 38{,}95° . \sin. 66{,}79°}$; lt. Knecht $= \frac{0{,}470 - 0{,}777 . 0{,}395}{0{,}630 . 0{,}919} = \frac{0{,}164}{0{,}597} =$
$= 0{,}282$. — Die Sinusskala 28_2 deutet aber auf 16,4 Grad, und somit auf ein

$P = 90 - 16{,}4 = 73{,}6^\circ$; in Zeit $= 73{,}6 \,.\, 4 = 294{,}4$ Minuten $= 4$ St. $54^1/_2{}'$ nachmittags od. vielmehr, da die Probe vormittags geschah: $12 - 4$ St. $54^1/_2{}' =$ $= 7$ Uhr $5^1/_2{}'$ vormittags. (Wahre Sonnenzeit.)

Zusatz. Da laut Zeitgleichungstabelle (Kap. 11) am 15. Juni die wahre Sonne mit der mittlern zusammenfällt oder die Correction auf mittlere Zeit = Null, so gibt vorstehendes Resultat in diesem Falle auch gleich die bürgerliche Zeit.

Beispiel zur Formel 7: Den vorigen Fall etwas genauer mittels Meßknechts-Chordentafel od. linker Oberecke zu berechnen. — Antw.: Da laut Vorigem: $2\,H = 56^\circ$, $2\,B = 102{,}1^\circ$, $2\,D = 46{,}42^\circ$; $180 - 2\,B = 77{,}9^\circ$ so folgt:

$$Ch.\,x = \frac{2\,Ch.56^\circ - Ch.102{,}1 \,.\, Ch.46{,}42^\circ}{Ch.77{,}9\,(1 - Bh.46{,}42^\circ)}, \text{ lt. Knecht} = \frac{2 \times 0{,}9388 - 1{,}5555 \,.\, 0{,}7885}{1{,}2572\,(1 - 0{,}0808)}$$

$= \frac{0{,}6515}{1{,}1556} = 0{,}5628$; also 100fache $Ch.\,x = 56_{28}$, welcher Werth in der *Ch.*-Spalte aufgesucht auf $x = 32{,}7^\circ$ knapp, genauer $32{,}68^\circ$ zeigt, folglich war die Zeit $=$ 6 St. $+ 2\,x$ Min. $= 6$ Uhr $+ 65^1/_3{}' = 7$ Uhr $5^1/_3$ Min. Und wenn die Beobachtung nachmittags geschah $= 6$ St. $- 1$ St. $5^1/_3{}' = 4$ Uhr $54^2/_3{}'$.

Erster Anhang zu Kapitel 9.

Kleine Vor- u. Nachschule zur Begründung der vorstehenden §§ 110—115.

Beweise zur Flächenbestimmung oder Complanation der Kugel u. ihrer Theile entwickeln sich am einfachsten durch successive Lösung folgender 4 Aufgaben; worin wieder wie früher r u. d den Halb- u. Durchmesser der Kugel, D u. δ den Durchm. der Grund- u. Deckfläche einer Zone resp. Calotte u. h deren körperl. Höhe bedeutet. § 118.

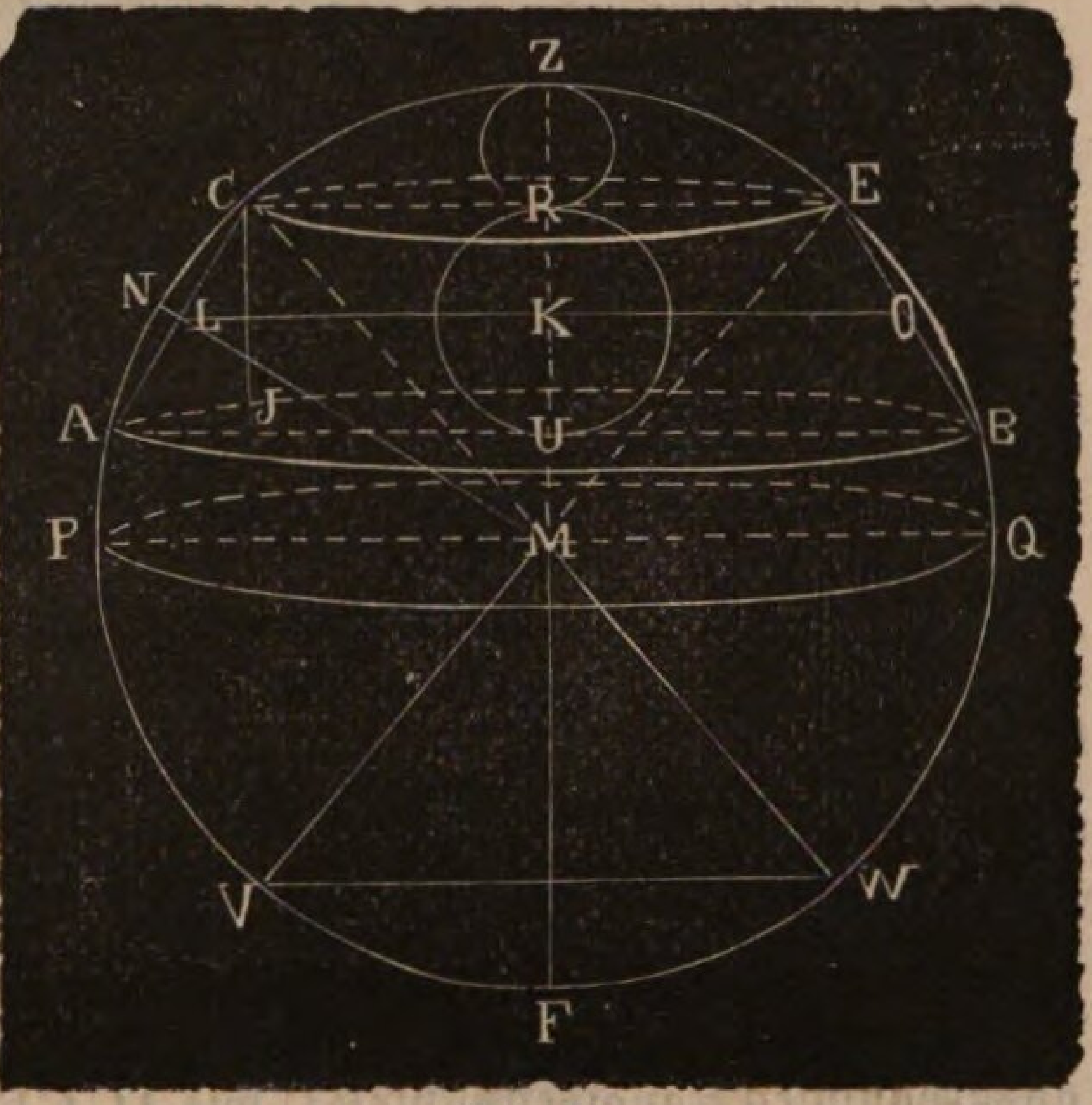


Fig. 5b.

1. Die Mantelfläche des einer Zone eingeschrieb. Kegelstumpfes zu finden! Bekanntl. ist der Mantel dieses Kegelstumpfes ACEB (1) m = mittl. Umkreis LO mal Seite $AC = 2\pi \,.\, LK \,.\, AC$. Setzt man den Abstand der Sehne AC vom Bogen ANC, also $LN = a$, so folgt aus $\triangle$ ACJ $\backsim$ MLK... $AC : CJ = ML : LK$ d. i. $AC \,.\, LK = CJ \,.\, ML = h\,(r - a)$; also (1) $\mathbf{m = 2\pi h\,(r - a)}$.

2. Den Mantel der Kugelscheibe AE od. die Fläche der Zone von der Körperhöhe h zu finden! — Zerschneidet man dieselbe in n gleichdicke Scheiben und nennt man die verschiedenen, denselben wie vorstehend eingeschriebenen Kegelmäntel und deren Abstände m_1 u. a_1, m_2 u. a_2 ꝛc. so ist deren Summe laut Formel 1)

$$= 2\pi \frac{h}{n}\Big[(r - a_1) + (r - a_2) \ldots + (r - a_n)\Big] = 2\pi \frac{h}{n}\Big[n\,r - (a_1 + a_2 \ldots + a_n)\Big] =$$

$= 2\pi r \,.\, h - 2\pi h \,.\, \frac{(a_1 + a_2 \ldots + a_n)}{n}$. Man denke sich nun n wachsend bis in's Unendliche. Dann geht dieser Fasettenmantel mehr u. mehr über in die vollkommen sphärische Zone, u. das zweite Glied vorstehender Formel mehr u. mehr über in Null. Folglich mathematisch-genau 2) Zonenfläche $AE = z = 2\pi r \,.\, h = \pi d \,.\, h =$ Kugelumkreis $\times$ körperl. Zonenhöhe.

3. Die Fläche des Kugelsegments oder der Calotte von der körperlichen Höhe h? — Man denke sich die vorige Zone oder deren Höhe aufwärtssteigend bis zum Scheitel der Kugel. Indem sie solchergestalt allmälig übergeht in die Calotte AZB od. CZE muß die vorige Flächenregel: Kugelumkreis $\times$ Höhe h auch für solchen Abschnitt gelten. Also $F = h \times$ Umf. d.

4. Die ganze Kugelfläche? . . . Da die Halbkugel = Calotte von der Höhe r od. $d/_2$, so folgt aus vorigem: Oberfläche der Halbkugel = Kugelumkreis × Kugelradius, oder $= 2\pi r . r = 2\pi r^2$; also der ganzen Kugel $= 4\pi r^2$ = 4fache Fläche des größten Kreises (= 4 *Kr.*$_d$ od. *Kr.*$_{2d}$).

§ 119. **Beweise zur Volumenbestimmung oder Kubatur der Kugel u. ihrer Theile (s. Fig. 55).**

1. Zur vollen Kugel. Man denke sich über die Kugelfläche ein Netz von zahlreichen möglichst gleichweit von einander entfernten Punkten ausgebreitet und immer je drei dieser Punkte durch grade Linien unter sich und mit dem Centrum verbunden. Dadurch bildet sich unterhalb u. inner der wirklichen eine Fasettenkugel aus n=dreikantigen Pyramiden. Die ebenen dreieckigen Fasetten bilden deren Grundflächen; dieselben seien $g_1, g_2 .. g_n$. Die lothrechten Höhen dieser Pyramiden sind natürlich um eine Kleinigkeit kleiner als deren Seiten d. i. als der Kugelradius r. Wir setzen sie deshalb aufeinanderfolgend $= r - a_1,\ r - a_2 .. r - a_n$. Folglich ist laut Kap. 4 die Summe aller dieser Pyramiden

$$V^1 = \frac{r-a_1}{3} \cdot g_1 + \frac{r-a_2}{3} \cdot g_2 .. + \frac{r-a_n}{3} \cdot g_n = \frac{r}{3}(g_1 + g_2 .. g_n) - (a_1 g_1 + a_2 g_2 .. + a_n g_n)$$

In das letztre Glied statt der Faktoren $a_1, a_2 .. a_n$ deren Mittelwerth a gesetzt, gibt $V^1 = r/_3\,(g_1 + g_2 .. + g_n) - a\,(g_1 + g_2 .. + g_n)$. Man denke sich nun n in's Unendliche fortwachsend: so geht mehr u. mehr die fasettirte Kugel über in die richtige, u. gleichzeitig in vorstehender Formel die eingeklammerte Summe über in die wirkliche Kugelfläche u. der Faktor a in Null. Das logische Ziel dieser Vorstellung ist also: dort die Kugel, hier der Werth $r/_3$ × Kugeloberfläche minus Null. Folglich math.=genau $V = r/_3 . 4\pi r^2 = 4/_3\,\pi r^3$ od. $\pi/_6\,d^3$ od. $2/_3\,d$ × *Kr.* d.

2. Zum Kugelkegel, wie MCZEM. Nach denselben Gründen wie bei der Vollkugel muß dessen Inhalt sein = Calottenfläche × $1/_3$ Kugelradius oder × $1/_6$ Durchm. Wenn also die Calottenhöhe RZ = h u. der Kugeldurchm. = d, so folgt aus § 118,3. . . $V = \frac{2\pi r^2 . h}{3} = \pi/_6\,d^2 h = 2/_3\,h . \pi/_4\,d^2 = 2/_3\,h$ × *Kr.* d; = größte Kreisfläche × $2/_3$ Calottenhöhe.

3. Zum Kugelsegment wie CZE, dessen Höhe RZ = h u. Grundflächen=durchm. CE = δ; während r u. d der Kugel=Halb= u. Durchmesser. — Da MR = r − h, u. $CR^2 = CM^2 - MR^2 = 2rh - h^2$, so folgt: Kegelinhalt MCE = $\pi . CR^2 . \frac{MR}{3} = \frac{\pi h}{3}(r - h)(2r - h)$. Diesen vom Inhalt des vorigen vollen Kugelkegels $V = \frac{2\pi h}{3} r^2$ abgezogen, gibt das Segmentsvolumen

(1) $V = \pi h^2 (r - h/_3)$ oder $\frac{\pi h^2}{6}(3d - 2h)$. Aus dem △ MCR folgt aber $r = \frac{1/_4\,\delta^2 + h^2}{2h}$. Durch Einsetzg. dieses Werths in vorstehende Frml. geht diese über in

(2) $V = \pi h^2 \left[\frac{1/_4\,\delta^2 + h^2}{2h} - \frac{h}{3}\right] = \pi/_4\,\delta^2 . h/_2 + \pi/_6\,h^3$ = Grundfläche × halbe Höhe plus Kugel um h = entspr. Paraboloid plus (eingeschriebene oder) Kugel von gleicher Höhe.

NB. Mittels Kreistafel des Knechts am besten so: $V = (Kr.\,\delta)\,\frac{\delta}{2} + (Kr.\,h)\,\frac{2h}{3}$.

4. Zur Kugelscheibe od. (Körperinhalt einer Kugelzone od. eines sphärisch=ausgebauchten Konoidenstumpfes) wie ACEB (Fig. 55). — Setzt man das gegebene AB = D, CE = δ, UR = h u. die unbekannte Ergänzungshöhe RZ = x u. UZ od. h + x = H, so hat man, wenn d der Kugeldurchmesser, lt. voriger Formel 1)

Abschn. AZB $= \pi/_6\,H^2(3d - 2H)$; Abschn. CZE $= \pi/_6\,x^2(3d - 2x)$; Diffrnz. beider = Scheibe $= \pi/_6\,[3\,d\,H^2 - 2\,H^3 - d\,x^2 + 2x^3] = \pi/_6\,[3\,d\,(H^2 - x^2) - 2\,(H^3 - x^3)] =$

$= \pi/_6\,[3\,d\,(H - x)\,(H + x) - 2\,(H - x)\,(H^2 + H\,x + x^2)] =$

$= \pi/_6\,[3\,d\,h\,(H + x) - 2\,h\,(H^2 + \mathrm{II}\,x + x^2)]$, d. i.

(1) $V = \frac{\pi h}{6}\,[3\,(dH + dx) - 2\,H^2 - 2\,Hx - 2\,x^2]$.

Nun ist nach bekanntem Kreisgesetz $CR^2 = ZR . RF$ d. i. $1/_4\,\delta^2 = x\,(d - x)$ und ebenso $1/_4\,D^2 = H\,(d - H)$. Aus beiden Werthen folgt: $d . H = 1/_4\,D^2 + H^2$ und $dx = 1/_4\,\delta^2 + x^2$ u. daraus $3\,(dH + dx) = 3/_4\,(D^2 + \delta^2) + 3\,H^2 + 3\,x^2$.

Der zweite Theil dieser Gleichung an Stelle ihres ersten in vorige Formel 1 gesetzt, vereinfacht diese in $\pi/_6\, h \left[{}^3/_4 (D^2 + \delta^2) + H^2 - 2 H \varkappa + \varkappa^2\right]$, worin die drei letzten Glieder $= (H - \varkappa)^2 = h^2$, so daß dieselbe sich reduzirt auf

(2) $V = \pi/_4 (D^2 + \delta^2)\, h/_2 + \pi/_6\, h^3$ (od. $+ \pi/_4 h^2 . {}^2/_3 h$) $=$
$\dfrac{Kr. D + Kr. \delta}{2} h + Kr.\, h \times \dfrac{2\,h}{3}$; also ganz wie beim vollen Abschnitt:

V = Entsprechendes Paraboloid plus Kugel von gleicher Höhe.

Beweise zur Volumenbestimmung der Sphäroids (Ellipsoids) u. des elliptischen Kegels. § 120.

1. Die große Achse AB sei $= d$, die kleine $CE = \delta$. Wie in jedem Lehrbuche über die Kegelschnitte bewiesen wird, ist die Ellipse herzuleiten a) aus dem umschriebenen Kreise (Fig. 56): indem man dessen Sehnen wie z. B. JK u. PQ im Verhältniß von d zu δ verkleinert; oder b) aus dem eingeschriebenen (Fig. 57), indem man dessen Sehnen JK, NO ꝛc. im Verhältniß von δ zu d vergrößert. So ist (Fig. 56) z. B.

(1) $LN = LP . \delta/_d$ u. (2) $MC = MJ . \delta/_d$.

Aus dem bekannten Kreisgesetze $LP^2 = AL . LB$ u. $MJ^2 = AM . MP$ folgt demnach aus 1) u. 2) $LN^2 ({}^d/\delta)^2 = AL . LB$ u. $MC^2 ({}^d/\delta)^2 = AM . MP$; folgl. $LN^2 : MC^2 = AL . LB : AM . MP$; d. h.: Bei Ellipsen verhalten sich die Quadrate der Ordinaten wie die Produkte der zugehörenden Abschnitte der großen Achse.

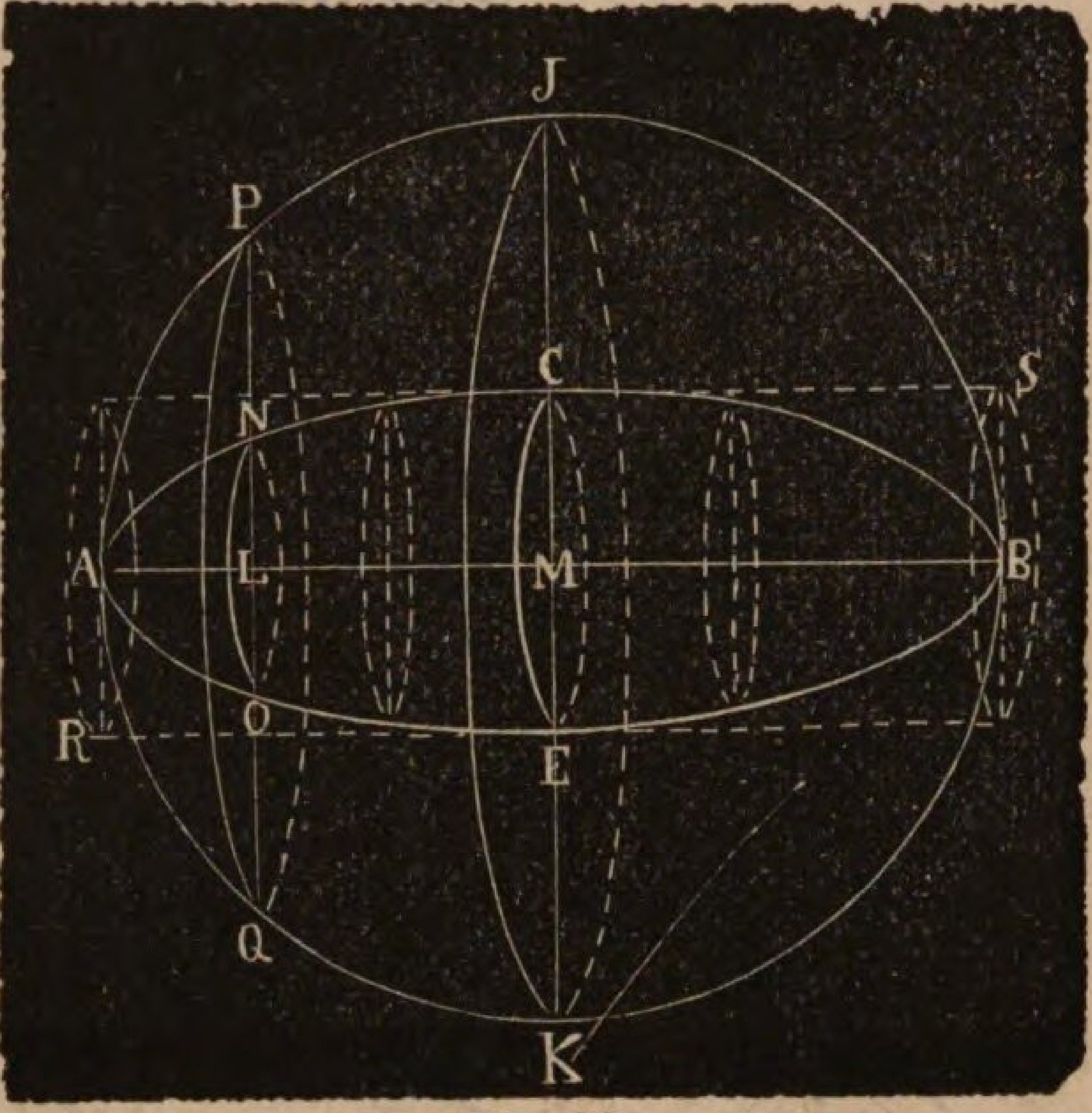


Fig. 56.

2. Das Volumen des länglichen oder eiförmigen Ellipsoids (Fig. 57)? Man lasse Kreis AJB u. zugehör. Ellipse ACB um deren große Achse $AB = d$ rotiren, so verhält sich jeder Querschnitt der Kugel, z. B. PQ, zum entsprechenden des Ellipsoids, hier NO (laut 1), wie $LP^2 : LN^2$ d. i. wie $d^2 : \delta^2$, folgl. auch Kugel : Ellipsoid $= d^2 : \delta^2$,

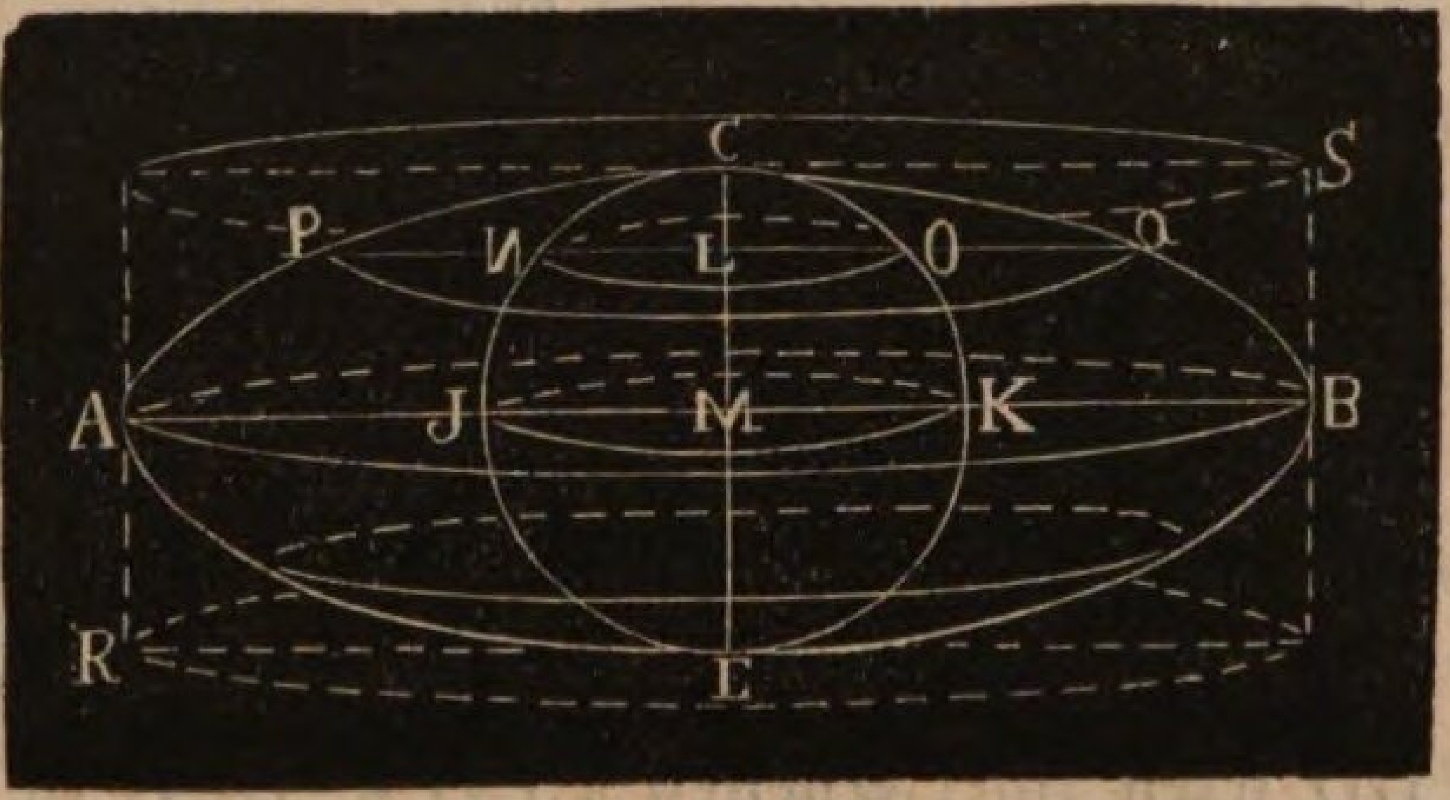


Fig. 57.

woraus Ellipsoid $= \dfrac{\delta^2}{d^2} \times$ Kugel $= \delta^2/_{d^2} . \pi/_6 d^3 = \pi/_6 d\, \delta^2 = {}^2/_3 d . \pi/_4 \delta^2 =$
$= {}^2/_3 d . Kr. \delta = {}^2/_3$ des umschriebenen Cylinders RS.

3. Das Volumen des abgeplatteten od. linsenförmigen Ellipsoids (Fig. 57). Man lasse Kreis CJE u. zugehörige Ellipse CAE um deren kleine Achse $CE = \delta$ rotiren, so verhält sich jeder Querschnitt der Kugel, z. B. NO, zum entsprechenden des Ellipsoids, hier PQ (lt. 1), wie $\delta^2 : d^2$, folglich auch

Kugel : Ellipsoid $= \delta^2 : d^2$; also Ellipsoid $= d^2/_{\delta^2} \times$ Kugel $= d^2/_{\delta^2} . \pi/_6 \delta^3 =$
$\pi/_6 \delta . d^2 = {}^2/_3 \delta . \pi/_4 d^2 = {}^2/_3 \delta . Kr.\, d = {}^2/_3$ des umschriebenen Cylinders RS.

4. Das Volum des ersten Ellipsoid (um die große Achse) verhält sich sonach zu dem des zweiten (um die kleine Achse) wie $\pi/_6 d\, \delta^2 : \pi/_6 \delta^2 . d$ d. i. wie $\delta : d$; trotzdem daß beide durch Rotation derselben Ellipse entstanden.

5. Der elliptische Kegel. Man denke sich in Fig. 56 das halbe längliche Ellipsoid EAC aufrecht gestellt, so wird EC die Basis u. A der Scheitel. Setzt man die Grundstärke $CE = D$, die Scheitelhöhe $MA = H$, die Höhe ML eines beliebigen Oberpunkts $L = h$ u. dessen Stärke $ON = x$, so gilt (lt. Satz 1) $x^2 : D^2 = AL . LB : AM . MB$ d. i. $= (H - h)(H + h) : H . H$ d. i. $= (H^2 - h^2) : H^2$, woraus $x^2 = \dfrac{H^2 - h^2}{H^2} . D^2$ od. $x = \dfrac{D}{H}\sqrt{H^2 - h^2}$. — Fragen wir nun: Wie groß ist x od. ON in halber Höhe, d. h. wie groß dieses Kegels Mittenstärke, so folgt durch Einsetzen v. $h = H/_2$ für x der Werth $D \sqrt{3/_4}$ od. Mittenstärke $= 0{,}866\, D =$ nahe 87 % der Grundstärke. Und fragen



Fig. 58.

wir nach der Höhenlage der halben Grundstärke d. i. nach der Richtpunktshöhe (Kap. 4) so folgt, indem man in voriger Gleichung statt x den Werth $^1/_2$ D einsetzt, leicht daraus durch Quadrirung rc. . . . h = H $\sqrt{^3/_4}$ = 0,866 H. Also kennzeichnet sich diese vollformige Kegelart auch dadurch, daß ihr Richtpunkt nahe bei 87 % der Scheitelhöhe liegt. — Die Frage endlich nach dem Volum eines solchen Kegels beantwortet Satz 2 mit: „Grundfläche × $^2/_3$ Scheitelhöhe."

Zweiter Anhang zu Kapitel 9.

Begründung der Zeitberechnungsformeln des § 117 oder der **Verwendung des Meßknechts als Sonnenuhr.**

§ 121. Erster Lehrsatz (aus der sphärischen Trigonometrie): In jedem sphärischen Dreiecke verhalten sich die Sinusse der Seiten wie die Sinusse der Gegenwinkel; also $\sin. \mathfrak{a} : \sin. \mathfrak{b} : \sin. \mathfrak{c} = \sin. \mathbf{A} : \sin. \mathbf{B} : \sin. \mathbf{C}$.

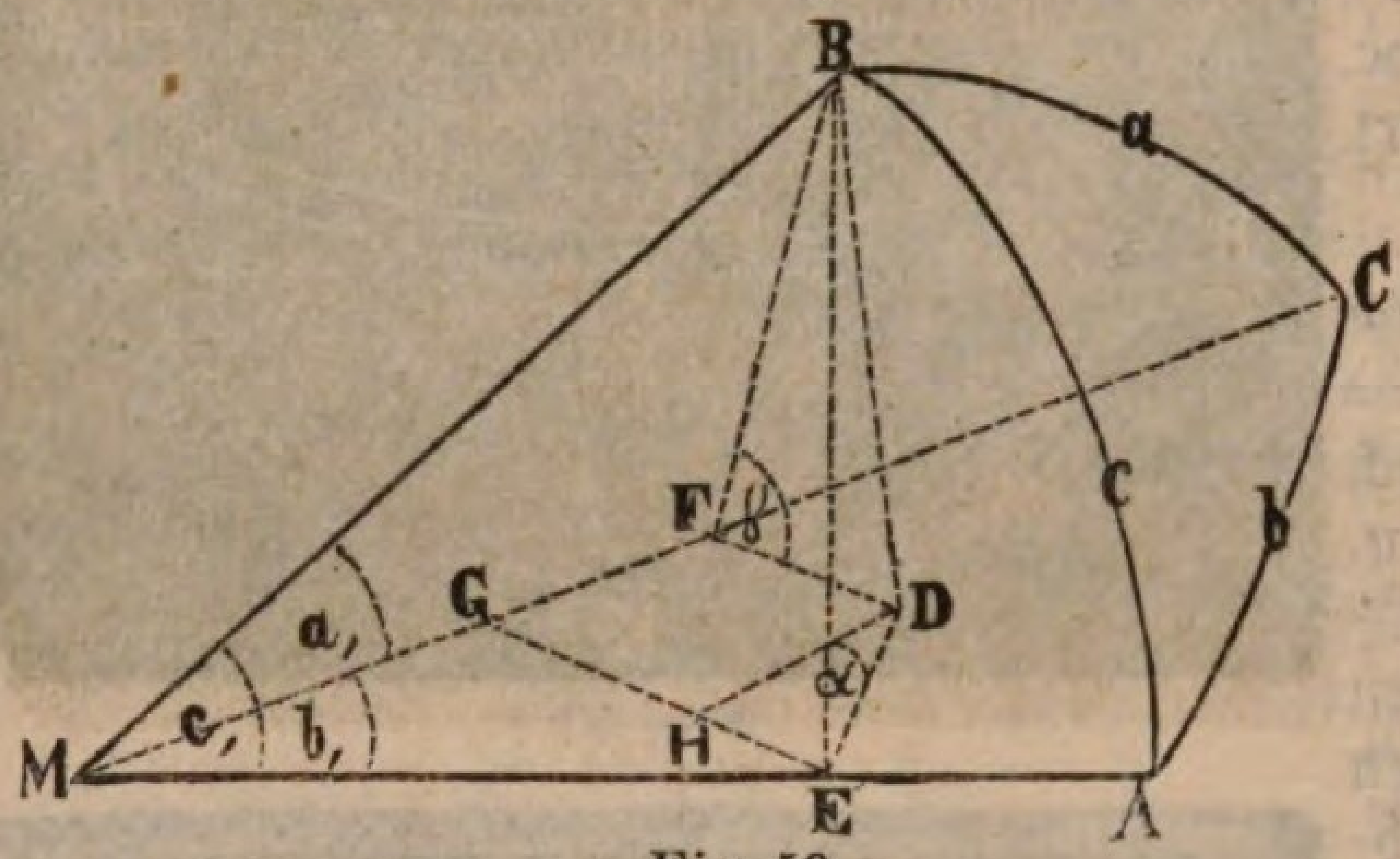


Fig. 59.

Beweis: Sei ABC ein beliebiges sphär. Dreieck (s. § 110), a, b u. c die Gradmasgröße seiner Seiten u. A, B, C die der gegenüberstehenden Winkel; M das Kugelmittel und somit MA = MB = MC = r. Die Seiten dieses Dreieckes sind, wie leicht erklärlich, identisch mit den drei Winkeln an der Spitze M dieses Kugelkeils, z. B. c (wie immer im Gradmas) = Winkel AMB = c_1; ebenso $b = b_1$, $a = a_1$. Ebenso die drei Winkel A, B u. C identisch mit den drei Flächenwinkeln an den Kanten; z. B. A = ∠ BED = α; u. C = ∠ BFD = γ: dafern dort EB u. ED in den beiden Seitenflächen AMB u. AMC lothrecht auf MA gezogen sind, und eben so hier BF u. FD lothrecht auf MC. Beides findet statt, wenn man sich denkt, BD sei ein Loth auf der als Grundebene angenommenen AMC, u. durch BD seien zwei Ebenen BED u. BFD so gelegt, daß sie die Kanten MA u. MC rechtwinklig durchschneiden.

Nach Gründen der Elementartrigonometrie ist nun:

(1) BE = r $\sin. c_1$ = r $\sin.$ c; (2) BF = r $\sin. a_1$ = r $\sin.$ a; sowie
(3) BD = BE $\sin. \alpha$, also = r $\sin.$ c . $\sin.$ A; aber auch
(4) BD = BF $\sin. \gamma$, also = r $\sin.$ a . $\sin.$ C. Folglich durch Gleichsetzung beider Gleichwerthe für BD . . . $\sin.$ c $\sin.$ A = $\sin.$ a $\sin.$ C, oder $\frac{\sin. A}{\sin. C} = \frac{\sin. a}{\sin. c}$.

Zusatz. Aus ähnlichen Gründen hat man
ED = EB $\cos. \alpha$, (laut 1) = r $\sin.$ c $\cos.$ A und
FD = FB $\cos. \gamma$, (laut 2) = r $\sin.$ a $\cos.$ C. Und
ME = r $\cos.$ c u. MF = r $\cos. \alpha$.

§ 122. Zweiter Lehrsatz (aus der sphärischen Trigonometrie): Wenn die drei Seiten a, b u. c eines sphärischen Dreiecks bekannt sind, so läßt sich jeder beliebige Winkel desselben, z. B. A, berechnen durch die Formel I) . . $\cos. \mathbf{A} = \frac{\cos. \mathfrak{a} - \cos. \mathfrak{b} \cos. \mathfrak{c}}{\sin. \mathfrak{b} \sin. \mathfrak{c}}$ (welche, wenn sie eine negative Cosinusziffer ergibt, dadurch andeutet, daß nicht der zu dieser Cosinusziffer aus der Tafel abgelesene Spitzwinkel sondern dessen stumpfer Nebenwinkel zu gelten hat. Vgl. S. 56.).

Beweis. Ziehe EG rechtwinklig auf MC od. parallel DF, u. DH//MC, so wird $\angle$ DEH = b. Denn b = b_1; und $\angle$ b_1 + $\angle$ MEH = 90°; aber $\angle$ DEH + $\angle$ MEH auch = 90°, woraus b_1 = $\angle$ DEH. — Folglich ist

(1) DH = ED . *sin.* b (lt. Zusatz des vor. §) = r *sin.* b *sin.* c *cos.* A. — Ebenso

(2) MG = ME . *cos.* b_1 (od. laut Zusatz des vorig. §) = r *cos.* b *cos.* c. Und somit

MF = FG + GM = DH + MG d. i. (nach Zus. des vor. § u. Vorstehendem)

r *cos.* a = r *sin.* b *sin.* c *cos.* A + r *cos.* b *cos.* c; woraus

$$\frac{cos.\,a - cos.\,b\ cos.\,c}{sin.\,b\ sin.\,c} = cos.\,A.$$

1. Zusatz. Auf das Polar-, Zenith- u. Sonnendreieck PZS der Fig. 53 angewendet, lautet vorstehende Grundformel I) . . . $cos.\,P = \frac{cos.\,h - cos.\,b\ cos.\,d}{sin.\,b\ sin.\,d}$, worin laut dort Bemerktem

h = Compl. der Sonnenhöhe H, also = 90—H b = Compl. der geogr. Breite B, also = 90—B d im Sommer = 90 — Declination D der Sonne d im Winter = 90 + " D " " *)	*) u. da *cos.* (90 + D) = — *cos.* (90—D), man beispielsweise also anstatt mit *cos.* 98° mit minus *cos.* 8° zu multipliciren hat, kann man statt — *cos.* b *cos.* d gleich

$\pm$ *cos.* b *cos.* d setzen, wo dann unverändert das obere für den Sommer, das untere für den Winter gilt.

Um hieraus die Formel 2 des § 117 abzuleiten, bedenke man (s. § 117 u. 82), daß h = 90 — H, also *cos.* h = *sin.* H ꝛc. ꝛc. Eben so leicht folgt aus 2 die Formel 3, da *cos.* B = *sin.* (90 — B). U. s. w. Um nun weiter letztre aus der Form

$cos.\,P = sin.\,(90-P) = \frac{sin.\,H \mp sin.\,B\ sin.\,D}{sin.\,(90-B)\ sin.\,(90-D)}$ überzuführen in 6 u. 7 des § 117

bedenke man zunächst, daß jedweder *sin.* α = ½ Chorde v. 2 α, woraus folgt

$$\tfrac{1}{2} Ch.(180-2\,P) = \frac{\tfrac{1}{2} Ch.2\,H \mp \tfrac{1}{4} Ch.2\,B \times Ch.2\,D}{\tfrac{1}{4} Ch.(180-2\,B)\ Ch.(180-2\,D)} = \frac{2\,Ch.2\,H \mp Ch.2\,B\,.\,Ch.2\,D}{Ch.(180-2\,B)\,Ch.(180-2\,D)}.$$

Auf beiden Seiten mit 2 multiplicirt und (180—2 P) = x gesetzt, gibt

(6) $$Ch.\,x = \frac{2\,Ch.\,2\,H \mp Ch.\,2\,B\ \ Ch.\,2\,D}{Ch.\,(180-2\,B)\,.\,Ch.\,(180-2\,D)} \times 2.$$

Und wenn man laut Fig. 21 auf S. 53 die *Ch.* (180 — 2 D) durch die Bogenhöhe ausdrückt als 2 (1 — *Bh.* 2 D), so geht Formel 6 über in

(7) $$Ch.\,x = \frac{2\,Ch.\,2\,H \mp Ch.\,2\,B\ \ Ch.\,2\,D}{Ch.\,(180-2\,B)\ (1-Bh.\,2\,D)}.$$

Will man sich zur Ausrechnung u. Aufsuchung dieses x der Chordentafel des Knechts ohne alle Kommaänderungen darin bedienen, wo dann *Ch.* u. *Bh.* für den Radius 100 abgelesen wird, so hat man demgemäs unter jeder *Ch.* u. *Bh.* der Formel 7 den Nenner 100 zu setzen, woraus nach einfacher Reduktion folgt

Zum Gebrauch der Meßknecht-Chordentafel ohne jede Aenderung } $$Ch.\,x = \frac{200\,Ch.\,2\,H \mp Ch.\,2\,B\ \ Ch.\,2\,D}{Ch.\,(180-2\,B)\ (100-Bh.\,2\,D)} \times 100.$$

2. Zusatz. Beweis, daß, wenn P im Gradmas gefunden, dann die wahre

Zeit { Vormittags = 12 Uhr — 4 P Min.
Nachmittags = ... 4 P "

Auf die volle Umdrehung v. P = 360° kommen 24 Stunden; auf je 1° also 24/360 = 1/15 Std. = 4 Min.; d. h.: So viele Grade die Sonne links od. rechts vom Meridian PZM des Beobachtungsortes, so viele Minuten vor resp. nach 12 Uhr. —

3. Zusatz. Beweis, daß, wenn nach Formel 6 od. 7 der Hülfswinkel x in Graden gefunden, die wahre Zeit dann $\frac{\text{Vormittags}}{\text{Nachmittags}}$ = 6 Uhr $\pm$ 2 x Minuten. Aus 180—2 P = x folgt 4 P = 360—2 x, also 4 P Minuten = (360—2 x) Minuten = 6 Std. — 2 x Min. Hierdurch geht die Regel des Zus. 1 . . „12 St. — 4 P Min." über in 12 St. — (6 St. — 2 x Min.) = 6 St. + 2 x Min.; u. „Nachm. = 4 P Min." über in = 6 St. + 2 x Min.

§ 123. **Begründung der zur Logarithmenrechnung geeignetern Formeln 4 u. 5 des § 117.**

Wenn α u. β zwei beliebige Winkel, deren Summe $\alpha + \beta = \gamma$ u. deren Differenz $\alpha - \beta = \delta$, so ist $\alpha = \frac{\gamma + \delta}{2}$ u. $\beta = \frac{\gamma - \delta}{2}$. Nun aber wird in jedem trigonometr. Lehrbuche bewiesen:

(1) $\cos. (\alpha + \beta) = \cos. \alpha \cos. \beta - \sin. \alpha \sin. \beta$ und

(2) $\cos. (\alpha - \beta) = \cos. \alpha \cos. \beta + \sin. \alpha \sin. \beta$.

Hieraus folgt ... $\cos. (\alpha - \beta) - \cos. (\alpha + \beta) = 2 \sin. \alpha \sin. \beta$ oder

(3) $\cos. \delta - \cos. \gamma = 2 \sin. \frac{\gamma + \delta}{2} . \sin. \frac{\gamma - \delta}{2}$.

Ebenso zeigt jedes solches Lehrbuch, daß u. warum

(4) $\frac{1 + \cos. \alpha}{2} = (\cos. {}^{\alpha}/_{2})^2$ u. (5) $\frac{1 - \cos. \alpha}{2} = (\sin. {}^{\alpha}/_{2})^2$. —

Die Grundformel (I) des vorig. § lautete: $\cos. P = \frac{\cos. h - \cos. b \cos. d}{\sin. b \sin. d}$.

Daraus folgt $\frac{1 + \cos. P}{2} = \frac{\cos. h - (\cos. b \cos. d - \sin. b \sin. d)}{2 \sin. b \sin. d}$ (u. laut voriger Formel 1) $= \frac{\cos. h - \cos. (b + d)}{2 \sin. b \sin. d}$. Den Zähler dieses Bruchs mit voriger Formel 3 verglichen u. in letztrer $\delta = h$ u. $\gamma = b + d$ gesetzt, verwandelt erstre in:

$\frac{1 + \cos. P}{2}$ od. (lt. 4) ... $(\cos. {}^{P}/_{2})^2 = \frac{2 \sin. \frac{b + d + h}{2} \sin. \frac{b + d - h}{2}}{2 \sin. b \sin. d}$, woraus

$\cos. {}^{1}/_{2} P = \sqrt{\frac{\sin. {}^{1}/_{2} (b + d + h) \sin. {}^{1}/_{2} (b + d - h)}{\sin. b \sin. d}}$; = Formel 4 des § 117.

Auf ähnliche Weise folgt aus obiger Grundformel (für $\cos. P$) . . .

$1 - \cos. P = \frac{\cos. b \cos. d + \sin. b \sin. d - \cos. h}{\sin. b \sin. d}$, (lt. oben sub 3) $= \frac{\cos. (b - d) - \cos. h}{\sin. b \sin. d}$.

Den Zähler dieses Bruchs wiederum mit obiger Formel 3 verglichen, indem man $\delta = b - d$ u. $\gamma = h$ setzt, gibt $1 - \cos. P = \frac{2 \sin. \frac{b + h - d}{2} \sin. \frac{h + d - b}{2}}{\sin. b \sin. d}$; also

$\frac{1 - \cos. P}{2}$ (lt. oben sub 5) $= (\sin. {}^{P}/_{2})^2 = \frac{\sin. {}^{1}/_{2} (d + h - b) \times \sin. {}^{1}/_{2} (b + h - d)}{\sin. b \sin. d}$; = Formel 5 des § 117.

Wenn man endlich die Summe der 3 Seiten des Dreiecks PZS Fig. 53, also die Summe $b + d + h = s$ setzt, wo dann ${}^{1}/_{2}(b + d - h) = {}^{s}/_{2} - h$; ${}^{1}/_{2}(d + h - b) = {}^{s}/_{2} - b$ 2c., so gehn beide Formeln 4 u. 5 über in

$\cos. {}^{P}/_{2} = \sqrt{\frac{\sin. {}^{s}/_{2} \sin. ({}^{s}/_{2} - h)}{\sin. b \sin. d}}$ und $\sin. {}^{P}/_{2} = \sqrt{\frac{\sin. ({}^{s}/_{2} - b) \sin. ({}^{s}/_{2} - d)}{\sin. b \sin. d}}$.

(Rechnungsbeispiele s. § 117; und das eigentliche Sonnenhöhen- od. Zeitmeß-praktikum am Schlusse des Kap. 11.)

Vierter Abschnitt.

Aus der

GEODÄSIE

mit

DENDROMETRIE UND CHRONOMETRIE

oder

Feld- u. Wald- nebst Baum- u. Zeit-

Messkunst.

Aus und zu dem

geometrischen Practicum des Ingenieur-Messknechts.

Fig. 1.



Fig. 2.

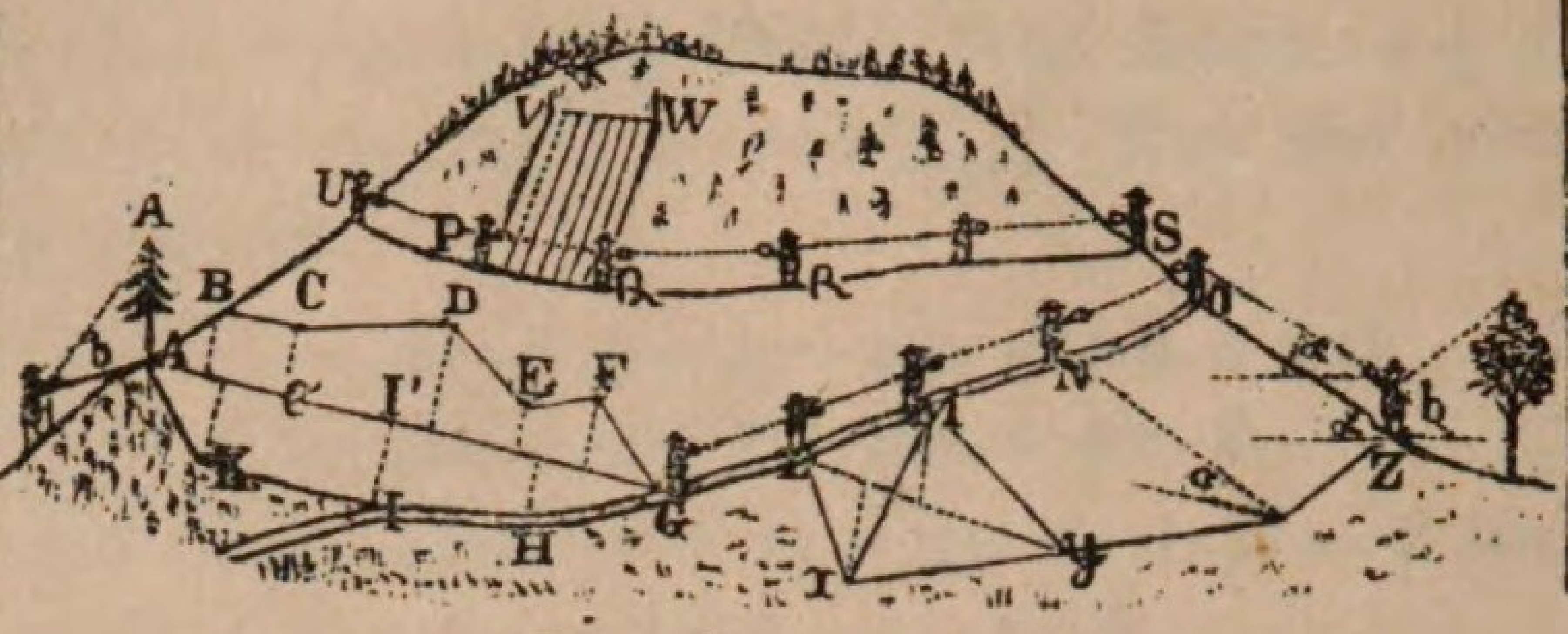


Fig. 3.

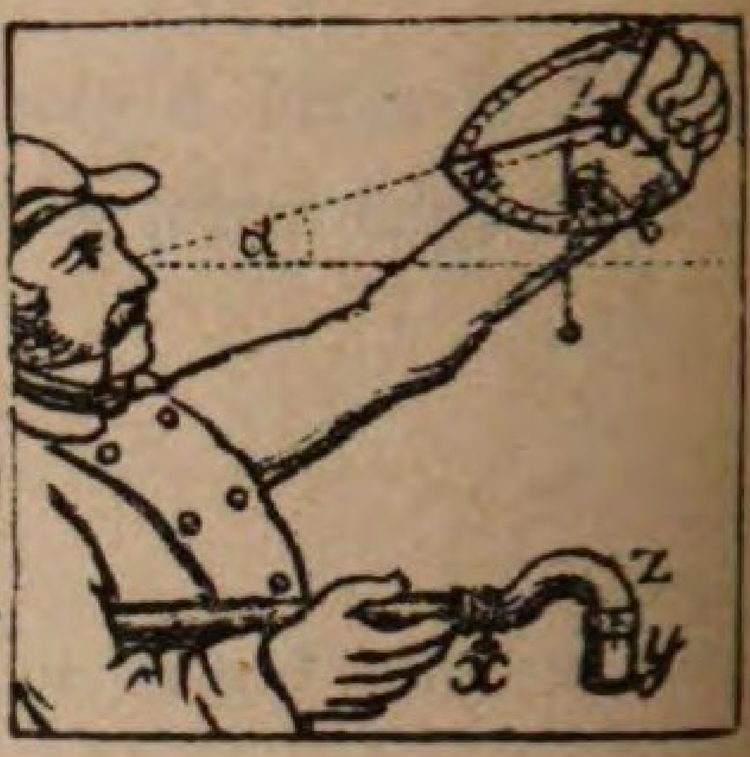


Fig. 4.

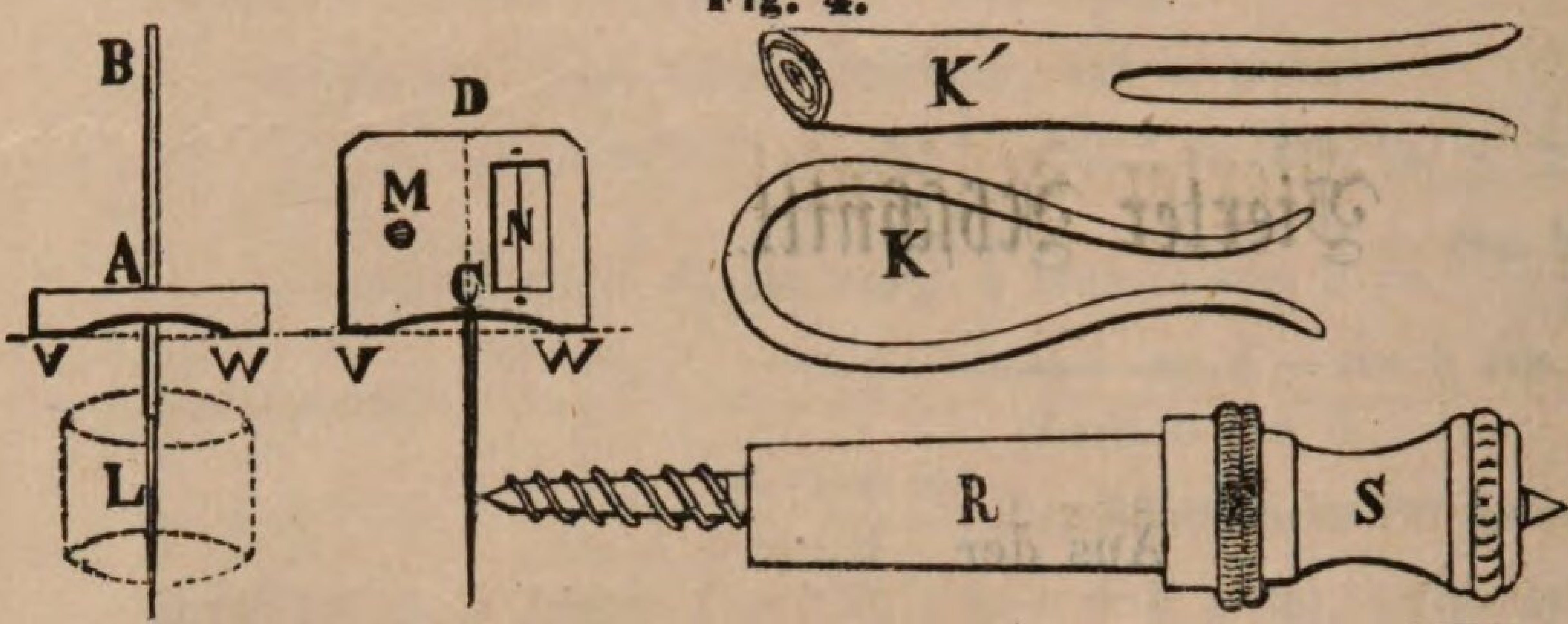


Fig. 5.



Fig. 6.

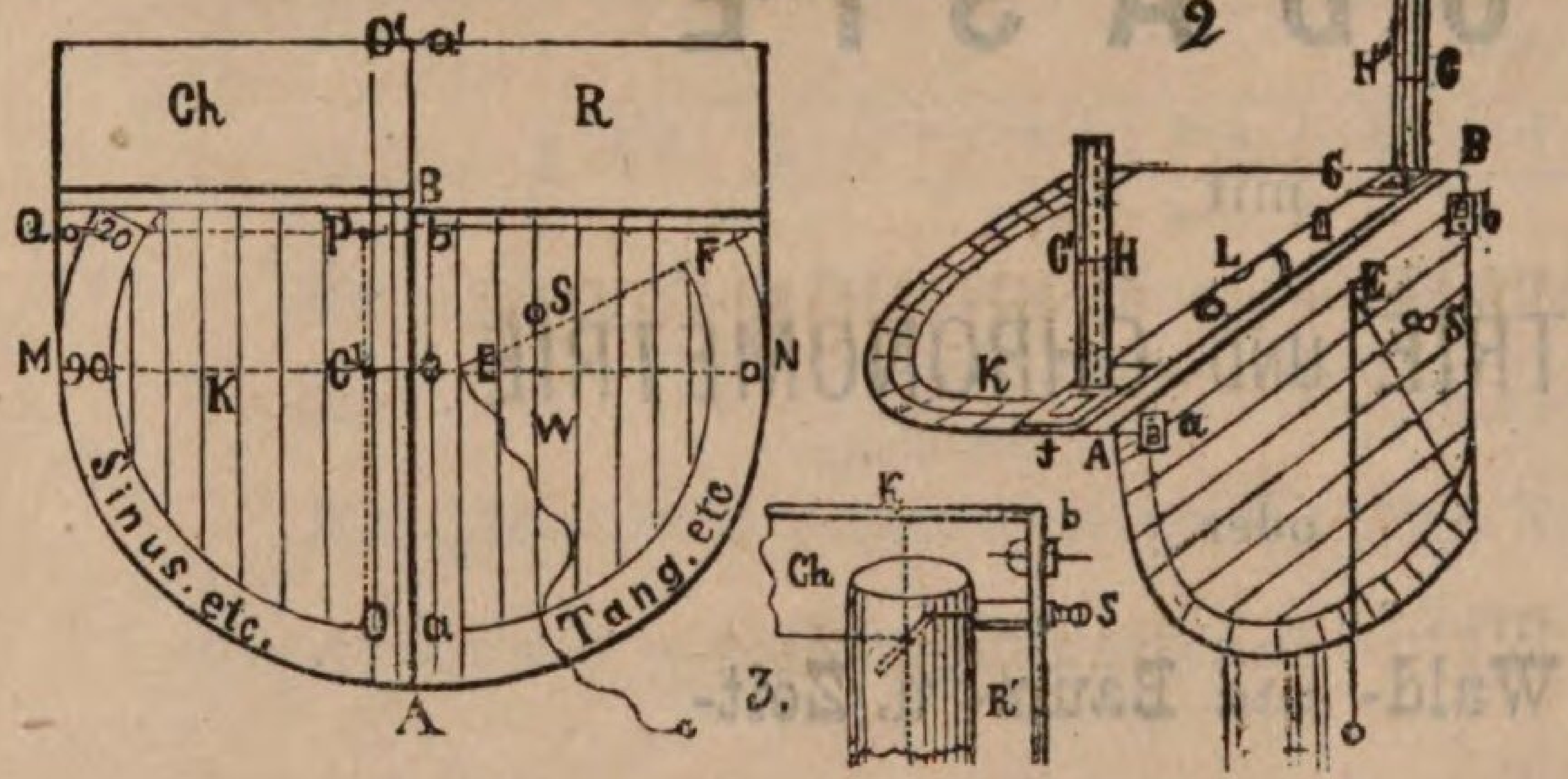


Fig. 7.

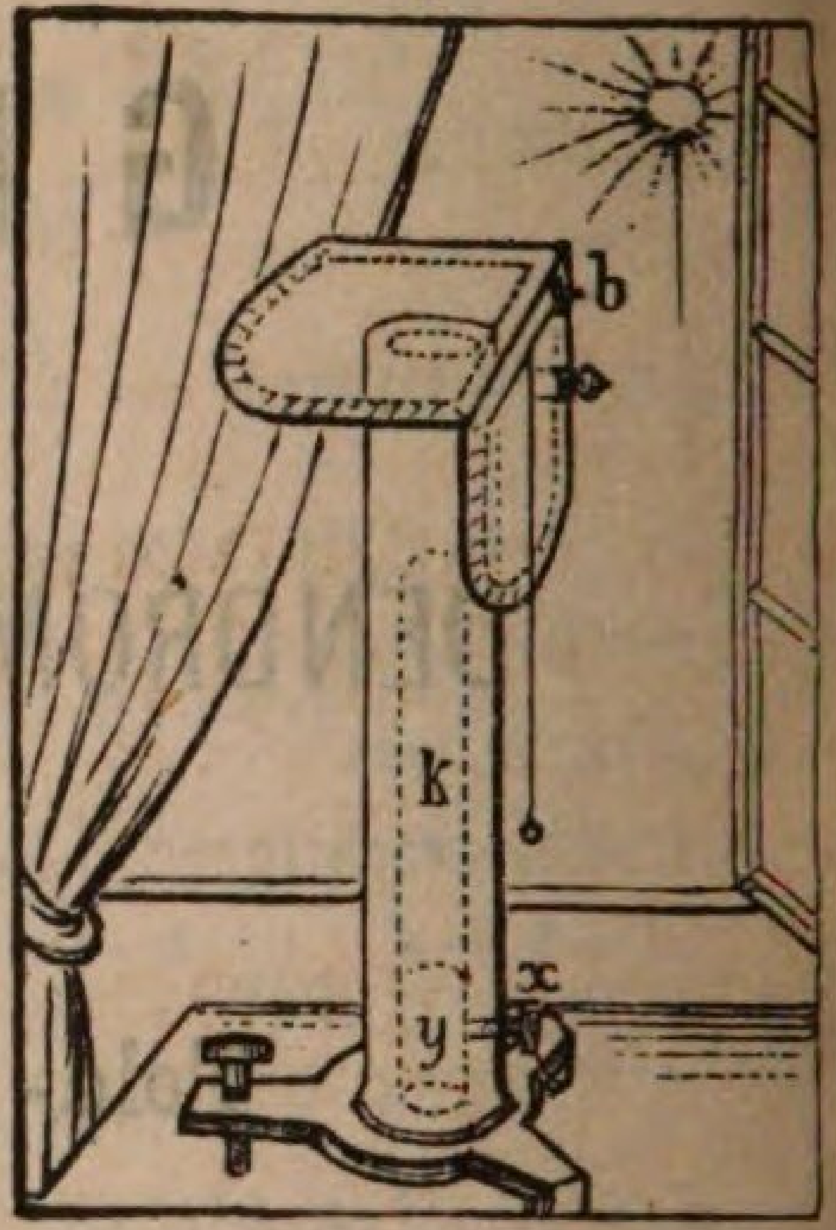


Fig. 8.

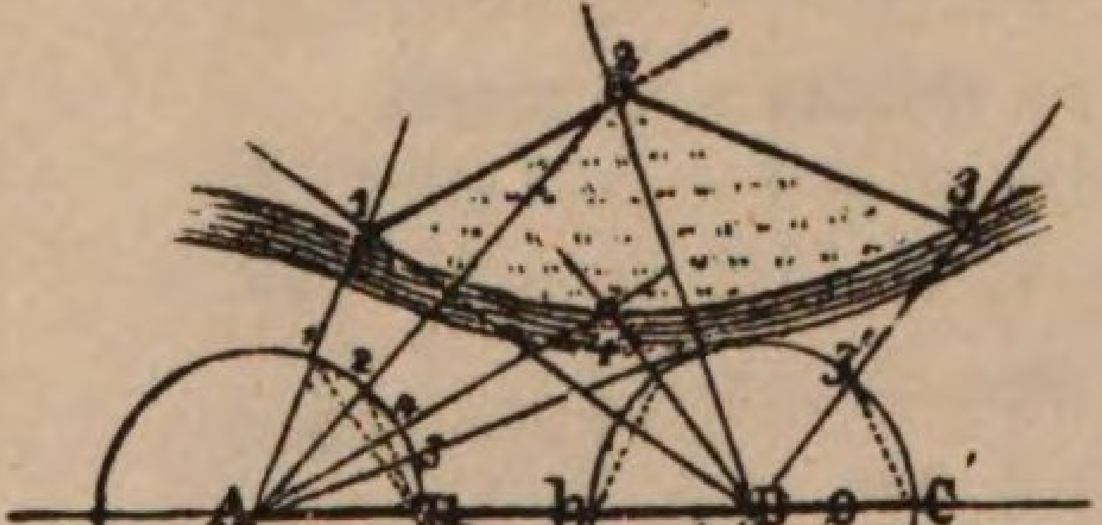


Fig. 9.

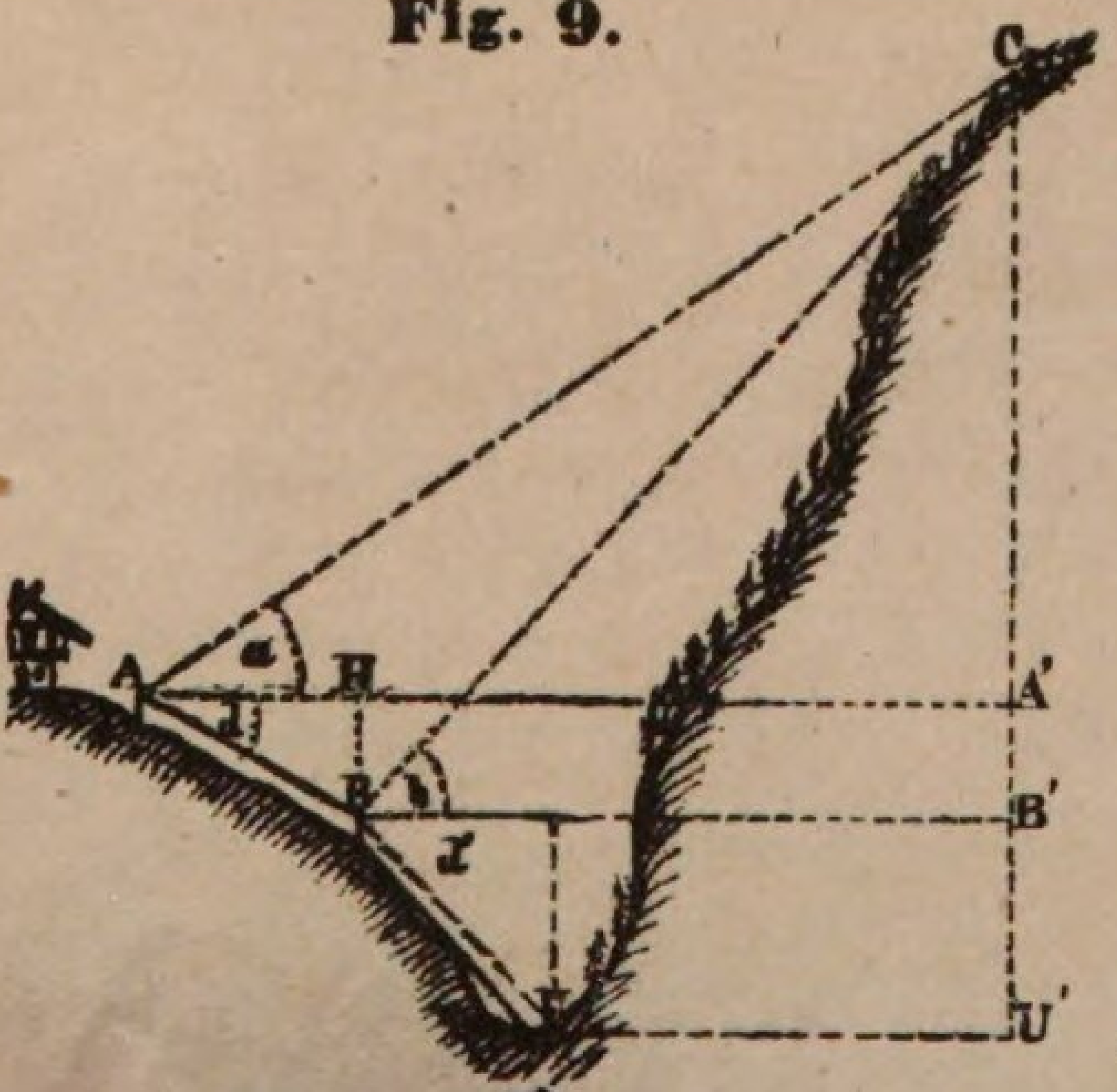


Fig. 10.

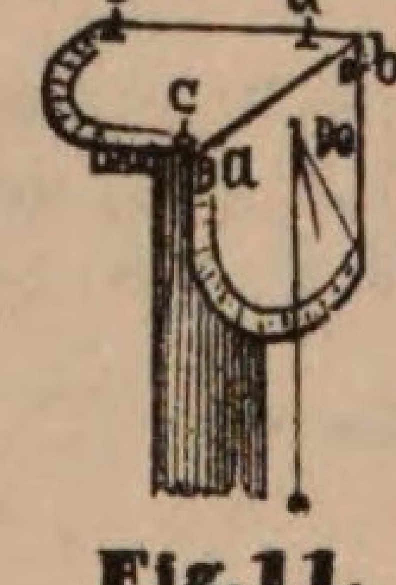


Fig. 11.

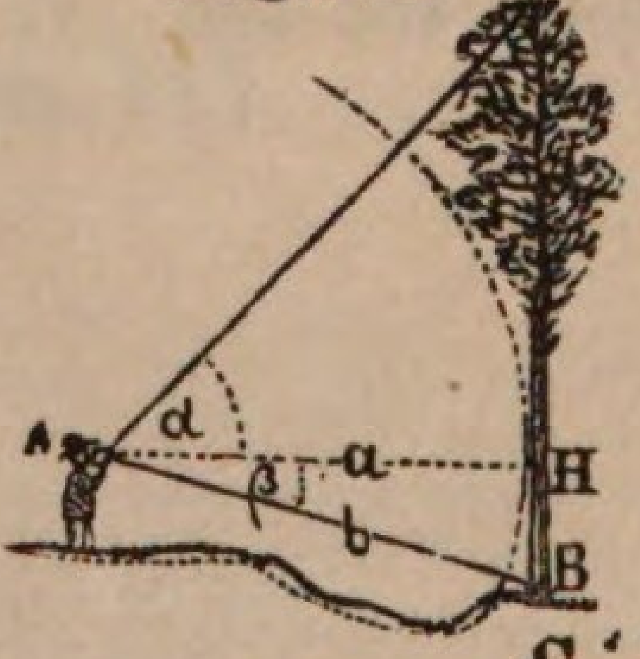


Fig. 12.

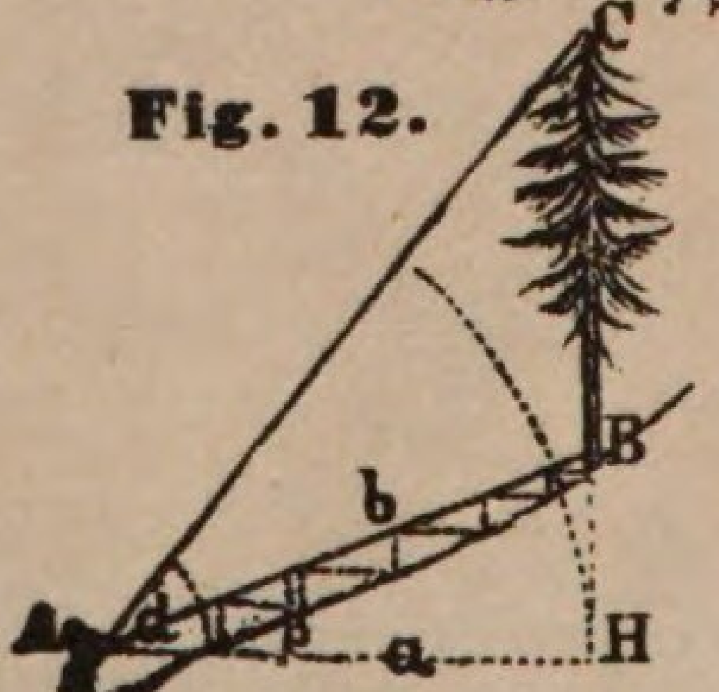
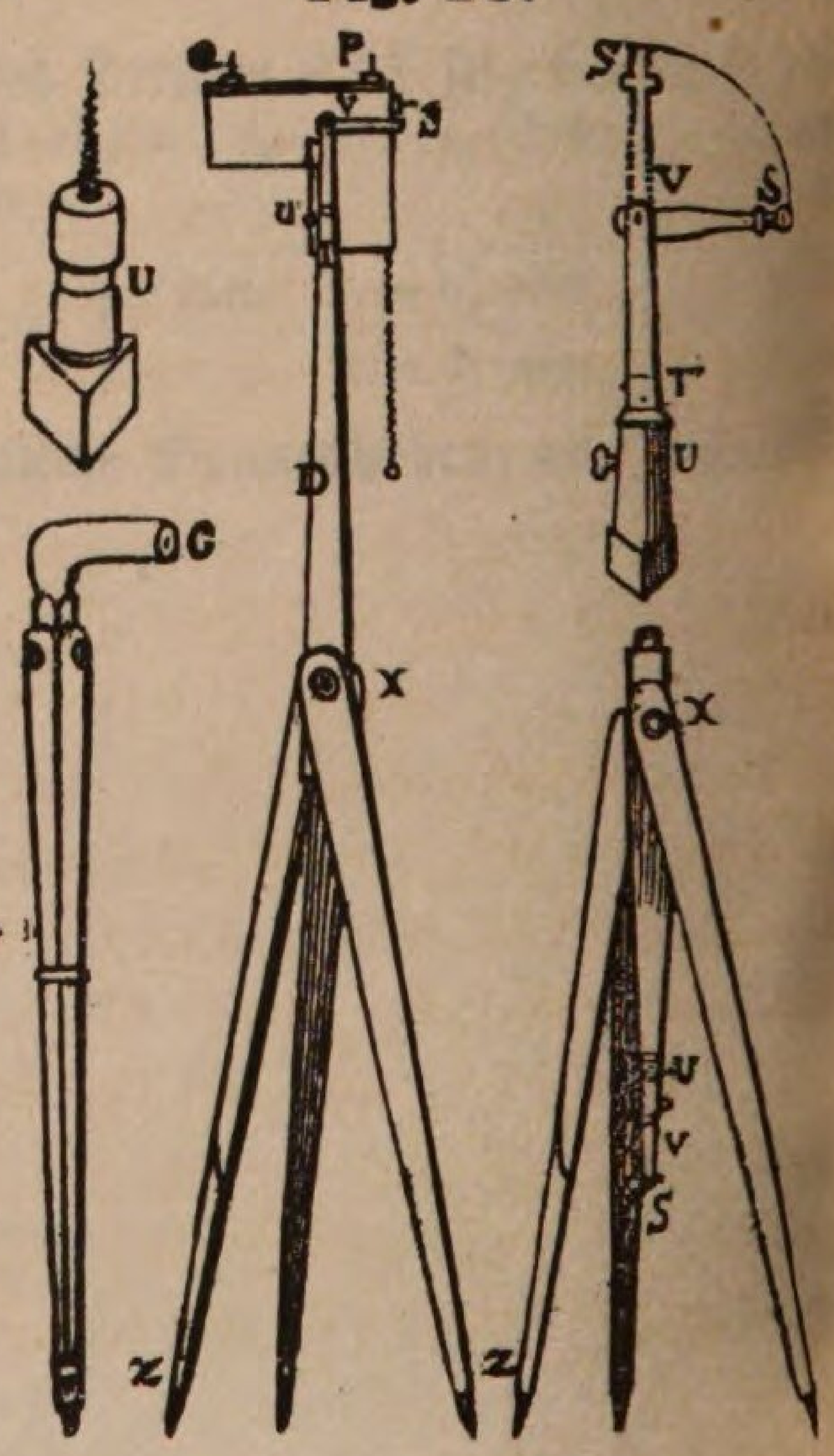


Fig. 13.



Kap. 10. Der Ingenieur-Meßknecht ohne jegliche Armatur oder schlicht u. in freier Hand.

A. Allgemeines. Einübung u. Justirung.

Ueberhaupt. Nebenstehendes Figurenblatt gibt unter seinen Nummern § 124.
1, 2, 3, 5, 9, 11 u. 12 einige schwache Andeutungen dessen, was ein Lehrer mit seinen Schülern und der Ingenieur od. Forst- u. Landwirth u. dgl. für sich mit seinem einfachen Meßknecht ohne alle weitere Zuthat ausführen könne, sobald er dessen geometrisches Vermögen in's Gebiet der Geodäsie überträgt, und zwar dies Wort „Geodäsie" in seiner weitesten Bedeutung als „Naturvermessung" genommen. Nur daß man dann bei Absteckungen von rechten od. andern Feldwinkeln (Fig. 1) oder bei Terrainaufnahmen nach der Coordinatenmethode (Fig. 2) noch einen Gehülfen zur Seite, und bei Sonnen- oder Zeitbeobachtungen annoch ein einfaches Schattenstiftchen braucht, weshalb wir letztre Aufgabe richtiger in's folgende Kapitel verweisen. — Wenn dann nicht blos der eigentliche Vermesser A sondern auch sein Gehülfe B mit einem Knecht versehen und darin entsprechend eingeschult ist, und wenn Jeder seine Augenhöhe am Andern (z. B. an Kinn od. Nase od. Stirn ꝛc.) abgepaßt hat: so wird man vermöge gegenseitiger Controle bei Beobachtung od. Absteckung von Horizontalen oder von Elevationen u. Depressionen (Fig. 2 u. 3) neben aller leicht denkbaren Flottheit auch einen Genauigkeitsgrad bewirken, den der sachverständige Neuling hierbei zu erwarten von vornherein i. d. R. sich nicht für berechtigt glaubt. — Man bedenke, daß bei ruhigem Wetter jede einzelne Horizontal- od. Tiefenvisur um nicht mehr als 1/4 Grad ab od. zu unsicher sein kann u. darf, wenn man sich ein wenig eingeschult hat, und daß dann der Pendelfaden mit analoger Genauigkeit in Einem Blicke angibt: a) den Höhen- od. Tiefenwinkel im Gradmas; b) die zugehörige Tangente d. i. das entspr. Steigungs- u. Neigungsprocent; c) den Cosinus u. damit das Reductionsprocent zum sofortigen Ueberführen der geneigten Länge od. Fläche in ihre entspr. Horizontalgröße; d) die Sekante u. damit das Reductionsprocent für's Gegentheil des vorigen, also z. B. (Fig. 11) zum Ueberführen deren Horizontal-Länge od. Fläche a in die Schiefgröße AB od. AC; u. s. w. u. s. w. Und dann bedenke man auch, daß man jene Schwankung u. Unsicherheit der Einzelvisur auf ein Minimum verringern kann, wenn man, eben sowohl bei der Verwendung als Winkelkreuz wie als Hipsometer, das Repetitionsprincip anwendet u. aus drei, vier, fünf Beobachtungen das Mittel nimmt; wobei man aber jede vom betr. Mittel erheblicher abweichende und damit voraussichtlich abnorme Beobachtung wegwirft: u. was Alles bei der Einfachheit des Ganzen kaum ein paar Minuten beansprucht.

Visirpraxis u. Einübung. Gewissen strengern Anforderungen gegen- § 125.
über haben wir unsern Knecht, ohne Stativ u. jedwede Armatur, immerhin mehr nur als ein Taxations- denn als ein eigentliches Vermessungs-Instrumentchen anzusehen. Um aber dabei dem Wesen eines letztern so nah als möglich zu kommen, übe man sich im exacten Visiren, und bei Höhenmessungen namentlich auch im correcten Wenden des Knechts; u. beachte demnach folgende Hauptregeln.

1. Strebe nicht, beim Richten der Visirkanten AB od. BQ (Fig. 6) von diesen Kanten noch irgend etwas sehen zu wollen. Bei Höhen- od. Tiefenvisuren würde man dann stets die eigentliche Visirachse etwas zu hoch richten. Dabei kann man zur hipsometrischen Praxis auch die ganze linke Wand K

als Visirfläche benutzen; doch muß dieselbe bei den dünnen Knechten in gut ebenem Zustande erhalten und dann beim Visiren eben im Begriff sein, unsichtbar zu werden; wie beim normalen Abkommen mit der Büchse Visir u. Korn sich decken müssen. — 2. Bei Horizontal- u. Höhenvisuren: mit thunlichst gestrecktem linken Arme (Fig. 3) u. so, daß der Pendelfaden, nachdem er dafern nöthig vorher mit der rechten Hand zur Ruhe gebracht worden, nicht anliegt sondern um ein Weniges d. h. um nicht mehr als ein paar Millimeter absteht; was beides, Ruhe nämlich u. Abstand, man gut beobachten kann, wenn man mit gestrecktem Arme arbeitet. — 3. Um dann das Pendel zum correcten Anliegen, Festhalten u. Ablesen zu bringen: Während des Abkommens langsam wenden! ja nicht plötzlich, sondern allmälig unter fortwährendem Einhalten des Abkommens. — 4. Tiefenvisuren von mehr als 25 Grad hat man mit umgekehrter Visirachse auszuführen, u. am bequemsten dann, indem man den Knecht in die rechte Hand nimmt.

Man ruhe nicht, bis daß man diese an sich äußerst leichte Kunst richtig erlernt hat. Ob dies der Fall, prüft man, eben so leicht, wie folgt:

a) Betreffs der Nivellir- u. hipsometrischen Praxis: Man visire von seiner Stube aus bei ruhiger Luft od. bei geschlossenem Fenster irgend einen scharf markirten Punkt in der Weise der Fig. 3 u. wende u. lese in der Weise der Fig. 5 den dabei arretirten Pendelstand in der Gradskala ab. Bei dann beliebig fortgesetzter Wiederholung dürfen die äußersten Differenzen der verschiedenen Pendelstände die Größe von 1/2 Grad nicht überschreiten; so daß die größten Schwankungen gegen das eigentliche Mittel nicht über 1/4 Grad betragen. Wobei jedoch das Pendel nicht zu kurz sein darf. Man ruhe nicht u. übe so lange, bis daß man diese unschwere Fertigkeit erlangt habe! — b) Betreffs der Winkelkreuzpraxis: s. § 134.

§ 126. **Prüfung u. Justirung der beiden Visirkanten.** (Siehe Figurenblatt S. 94 Fig. 6_1 u. 6_2.)

Die in den beiden vorigen §§ bemerkten Anwendungen setzen voraus 1. daß die erste Schnittkante AB genau genug rechtwinklig zum ersten Radius der Pendelwand stehe d. i. zu derjenigen Linie, welche durch den Mittelpunkt E (= Pendels-Einfädelspunkt) des Vertikalkreises u. dessen Nullpunkt N geht; u. 2. daß die zweite Schnittkante BQ genau genug lothrecht gegen die erste stehe. Beides ist leicht zu prüfen (vgl. vorn im ersten od. Einleitungs-Abschnitte) u. wird auch immer der Fall sein. Sollte ausnahmsweise einmal AB gegen EN bemerkbar abweichen, so hätte man auf die Pendelwand neben A od. B einen Stich zu machen, der die Abweichung der Schnittkante konstatirt. Beim Visiren hätte man dann diesen als Anfangs- od. Endpunkt der correkten Richtkante zu betrachten, und denselben allenfalls dabei durch ein kurzes Stiftchen zu markiren.

§ 127. **Justirung u. Centrirung des Horizontalkreises** (eventuell mit Bedacht auf's Visirlineal).

Da in gegenwärtiges Kapitel auch die Meßknechtsverwendung als Transporteur gehört, so ist hierbei zunächst auf jene Prüfung u. Correction des Horizontal- u. Vertikalkreises zurückzukommen, welche im ersten od. Uebersichts-Abschnitte bereits vorläufig behandelt worden. Die erstere dieser beiden Aufgaben haben wir nun hier in folgender Weise zu repetiren u. zu ergänzen.

Den Horizontalkreis K zu centriren u. zu reguliren! (Siehe Figurenblatt S. 94 Fig. 6_1.) — Mit feiner Bleistiftspitze ziehe die Sehne von 0 Grad auf 90 Grad u. zwar nicht von od. an der innern sondern

äußern Kreislinie; suche vorsichtig die genaue Mitte dieser Chorde u. beschreibe mit der Hälfte der letztern aus jener Mitte einen kurzen Kreisbogen bei C, der entweder ganz od. doch nahe genau durch das daselbst mit einem Ringelchen angegebene Centrum gehen wird. Endlich errichtet man auf jenem Chordenmittel durch Kreuzbögen aus den Endpunkten 0° u. 90° ein Loth. Wo dieses jenen kurzen Kreisbogen schneidet, das ist der Punkt, welcher erstens (laut bekanntem Lehrsatze vom Peripheriewinkel im Halbkreise) mit 90° u. 0° einen exakten rechten Winkel macht und zweitens auch genau gleichweit von diesen beiden Hauptpunkten (0° u. 90°) des Theilkreises entfernt u. als Centrum desselben zu betrachten u. zu benutzen ist. Dieses Centrum C steche man nun durch (s. 2. Zusatz) u. lege außerdem noch durch dasselbe die zwei sich senkrecht kreuzenden Achsen OO′ u. MN, von denen man jedoch nur deren 4 Endpunkte u. zwar am äußersten Rande der Knechtstafel durch recht exacte Stiche markirt. Beim Gebrauch des Knechts zum unmittelbaren Winkelauftragen dienen diese 4 Stiche als „Orientirungspunkte" für's Stationiren desselben, wie § 131 lehrt (s. auch Zus. § 128).

1. Zusatz. Zum Durchstechen der Tafel benutze man keine zum Knechte gehörige Visirnadel, die dabei leicht zerbrechen könnte, sondern eine mit haselnußgroßer Siegellackkuppe versehene gehörig starke u. kurze Nähnadel, und suche diese ja recht senkrecht durchzubringen. Wer aber im Besitz eines Meßknechts-Visirlineals (s. Kap. 12), benutzt am besten dessen kürzern Centrumsstift zu solchem Durchstechen.

2. Zusatz. Soll derselbe Knecht zugleich auch in Feld u. Wald mit Stativ u. Visirlineal als Winkelmesser gebraucht werden (wozu man jedoch am besten ein besondres Exemplar von neuestem feinsten Stiche und stärkster steifster Pappe, einen sog. Doppelknecht, verwendet) so hat man vor dem Durchstechen wie folgt zu verfahren. Man fasse an dem dazu bestimmten Visirlineale (Kap. 12) die Distanz von der Inderkante bis zum Centrum seines Drehlochs in Zirkel, vergrößere diese Zirkelöffnung um $\frac{1}{2}$ Millimeter, setze den Zirkel an den äußern Rand der Gradskala beim Strich 45° u. bestimme nun in dem entspr. Radius durch die andre Zirkelspitze das dann i. d. R. um ein weniges zurück zu liegen kommende Centrum; wodurch man sich sichert, daß der Inder des Visirlineals nicht etwa über die Kreisskala hinausfällt, was natürlich die sichre Ablesung beeinträchtigen müßte.

Justirung des Vertikalkreises und seiner Richtlinien ab. § 128.
(Fig. 6 auf S. 94.)

Aus gleichem Grunde wie vorstehend ist nun auch noch die andre Aufgabe: „Theilkreis u. Richtlinien der Pendelwand zu prüfen u. zu reguliren!" in folgender Vervollständigung zu lösen. Ganz nach voriger Weise sucht man zunächst das Centrum E. (Also: Chorde von 0° nach 90°, u. aus deren Mitte mit ihrer Hälfte als Radius einen kl. Bogen bei E; ꝛc.) Dasselbe wird mit dem durchstochenen Einfädelpunkte des Pendels i. d. Regel ganz oder doch nahe genug zusammenstimmen. Für den Fall, daß es ausnahmsweise einmal, namentlich in der Richtung ab od. ba, bemerklich abwiche, hätte man den Faden herauszunehmen, das Löchelchen mit Wasser anzuquellen, dann abzutrocknen, mittels zwischengelegten Papiers von beiden Seiten zuzuklopfen und, nachdem der Knecht wieder ganz trocken geworden, mit thunlichst feiner Nähnadel (der man zuvor einen haselnußgroßen Siegellackkopf gegeben) an der genaueren durch obige Construction constatirten Stelle durchzustechen. Die Hauptsache bleibt dann noch: Mittels Verlängerung des Radius NE über K hin mehrere Richtlinien (parallel ab) so zu ziehen, daß sie jene Nullpunktslinie EN links od. rechts vom Einfädelungslöchelchen E genau rechtwinkelig durchschneiden. Letzteres geschieht, wie bereits im 1. Abschnitt gelehrt worden, einfach dadurch, daß man in der

verlängerten NE (S. 94, Fig. 61) neben E einen Punkt c annimmt, links u. rechts davon gleiche Stücke absticht, von diesen Stichpunkten mit thunlichst großer Zirkelöffnung ober- u. unterhalb Kreuzbogen einritzt, deren Kreuzpunkte unter Mithülfe einer Lupe ansticht, mit feiner harter Bleistiftspitze durch diese Stiche die Normal-Richtlinie auszieht und, falls dieselbe mit der lithographirten des Knechts nicht genau stimmen sollte, noch eine od. zwei Parallelen daneben legt. Wenn man den Knecht als Sonnenuhr benutzen will, thut man wohl, die Normalrichtlinie zinnoberroth auszuziehen.

Zusatz. Da man beim Gebrauch des Knechts als Transporteur in den Fall kommen kann, auch die Pendelwand mit benutzen zu wollen, so thut man wohl, die sich genau rechtwinklig durchkreuzenden Radien von 90° nach E u. von O nach E nach allen Seiten hin bis an den äußersten Rand zu verlängern u. deren vier Endpunkte, gleich denen zum Horizontalkreis gehörigen, als Orientirungspunkte für's desfallsige centrirte Stationiren des Knechts auf dem Papiere durch (von denen des § 127 sich unterscheidende) Stiche zu markiren.

B. Als Transversalmasstab, Metermas und Winkel-Transporteur.

§ 129. **Als Masstab u. Metermas.** Der neben der Hauptvisirkante liegende Transversalmasstab ist selbstverständlich als solcher auch genau. Als Masstab für die genaue absolute Größe des Milli-, Centi- u. Decimeters ist derselbe jedoch nicht ohne Prüfung zu verwenden. Man wählt dazu einen vom Mechanikus od. dgl. entlehnten Normaldecimeter u. gibt die etwaige Abweichung am besten durch einen Stich neben dem Striche an, der 100 Millimeter bedeuten soll. Man hat damit zugleich das Urtheil, um wieviel Procent der Masstab als Metermas beim Drucken u. Abziehen abweichend geworden. Steht z. B. dieser Correctionsstich um 1/3 Millimeter nach 110 hin, so bedeutet das sofort „zu kurz um 1/3 Procent od. 1/300 des Normalmases."

§ 130. **Als Winkelmesser auf dem Papiere*)** u. zwar 1. **indirekt durch die Chordentafel u. den Millimetermasstab.** — Wenn ein od. mehrere Winkel einer gezeichneten Figur nach Gradmas zu bemessen, so nimm vom vorgedachten Masstab 100^{mm} in Zirkel, setze letztern nach u. nach in den Scheitelpunkt jedes Winkels u. stich auf allen Schenkeln derselben 100^{mm} ab. Fasse in gleicher Folge die so bestimmten (100fachen) Chorden in Zirkel, miß dieselben am Masstabe, notire sie u. suche dann deren Größe in der *Ch.*-Sp. (der linken Oberecke), welche dann in der nebenherlaufenden Grad-Spalte die Winkel ganz unzweifelhaft bis auf's Halbzehntelgrad und in ziemlich sichrer Schätzungsweise bis fast auf die Minute genau angibt.

1. Zusatz. Sind einige od. sämmtliche Schenkel der fraglı. Winkel zu klein, so verlängere man dieselben vorher. Ist das nicht thunlich, so nehme man nur 50^{mm} statt 100 in Zirkel; doppele aber dann die betr. Chorde entweder indem man deren vom Masstab abgelesene Ziffer mit 2 multiplicirt oder: durch doppeltes Auftragen auf den Masstab von einem ihrem Doppelten entsprechenden Theilstriche aus. Z. B.: Wenn, am Masstabe unten angelegt, die einfache Chorde 44,3 circa zeigt, so rechnet man auf 88,6 und setzt deshalb den Zirkel zunächst versuchsweise im Vertikalstriche 80 auf die Sechs-Zehntellinie rc.

2. Zusatz. Stumpfe Winkel sind sämmtlich am besten durch ihre Nebenwinkel zu bemessen.

3. Zusatz. Liegen alle Winkel um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt herum, so kann man aus letztren mit dem Radius 100 resp. 50 gleich einen Kreis ringsherum ziehen. Doch muß man den Radius um so exakter abnehmen.

---

*) Auf dem Felde mittels Band od. Kette: In Messung u. Berechnung ganz analog. Vgl. Kapitel 5 „Chordentafel"; z. B. S. 55.

Als Winkelmesser auf dem Papiere u. zwar 2. **direkt** durch seinen Theilkreis. § 131.

NB. Ohne Verfeinerung durch's Visirlineal (Kap. 12) mittels dessen Indexes u. Abstechers kann indeß solche Messungsweise eine Genauigkeit bis zu $^1/_{10}$ Grad kaum beanspruchen. Jedenfalls: je dünner der Knecht, desto besser hierzu.

Erste Methode. Mittels Stationirung des Knechts durch 2 senkrechte Achsen. Wenn sämmtliche oder sehr viele der so zu bemessenden Winkel einen gemeinsamen Scheitelpunkt haben d. i. eine „Winkelrose“ bilden, so kommt man allerdings schneller u. bequemer zur Kenntniß des Gradmases derselben, wenn man durch diese Rose zwei sich recht∠lig kreuzende Durchmesser PR u. TQ so lang zieht und auch alle ihre übrigen Strahlen SA, SB, SC, SD so weit verlängert, daß sie über den Rand des Meßknechts hinausragen. Wenn man diesen nun mit seinem Centrum C auf den Mittelpunkt S der Rose stationirt u. orientirt (so daß alle 4 Orientirungspunkte des § 127 genau in beiden Achsen liegen), so kann man nach u. nach für alle 4 Quadranten das Gradmas ohne weitres ablesen

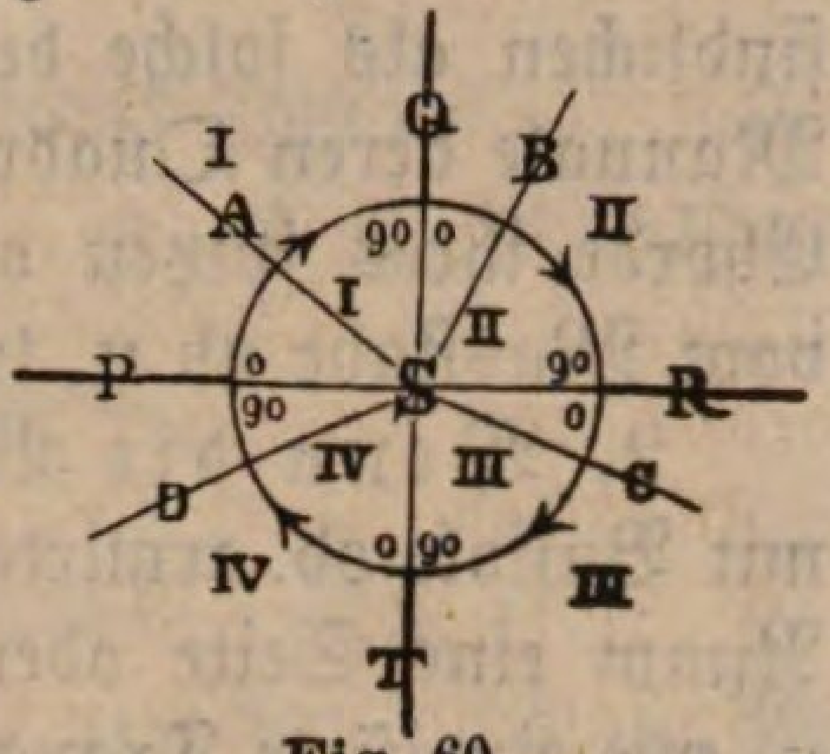
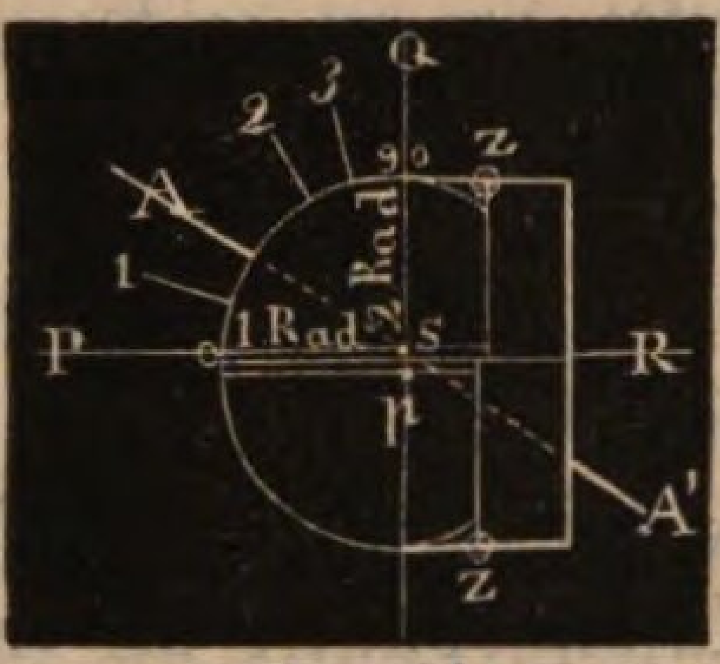
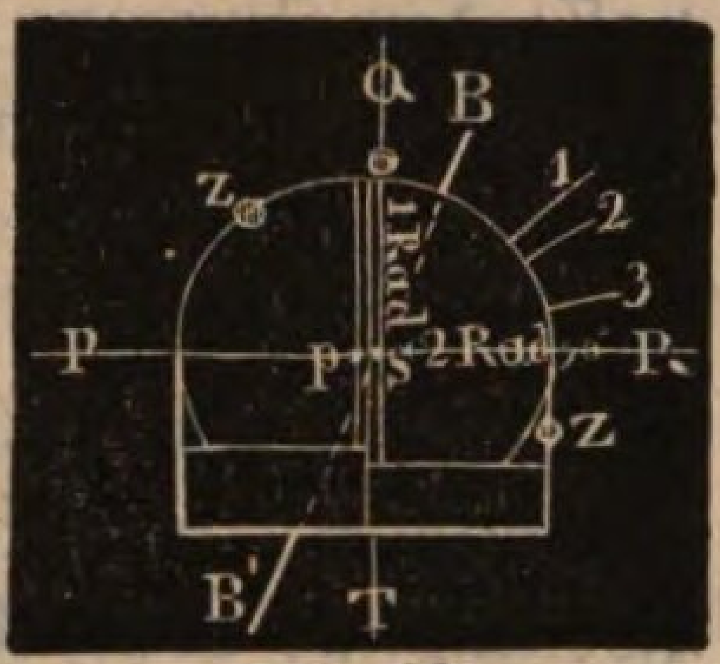


Fig. 60.

wie beistehende Figuren für den I. u. II. Quadranten zeigen; wobei der Knecht also einmal um 90° zu drehen war. Solche Drehung ist aber für 4 Quadranten nur einmal nöthig, wenn man vorher die Schenkel des dritten wie A¹ u. des vierten wie B¹ durch den Pol S in den ersten u. zweiten Quadranten durchzieht u. hiermit abliest. — In der Regel wird es nothwendig sein, den eingestellten Knecht durch ein paar Copirzwecken festzustellen.


Fig. 61.

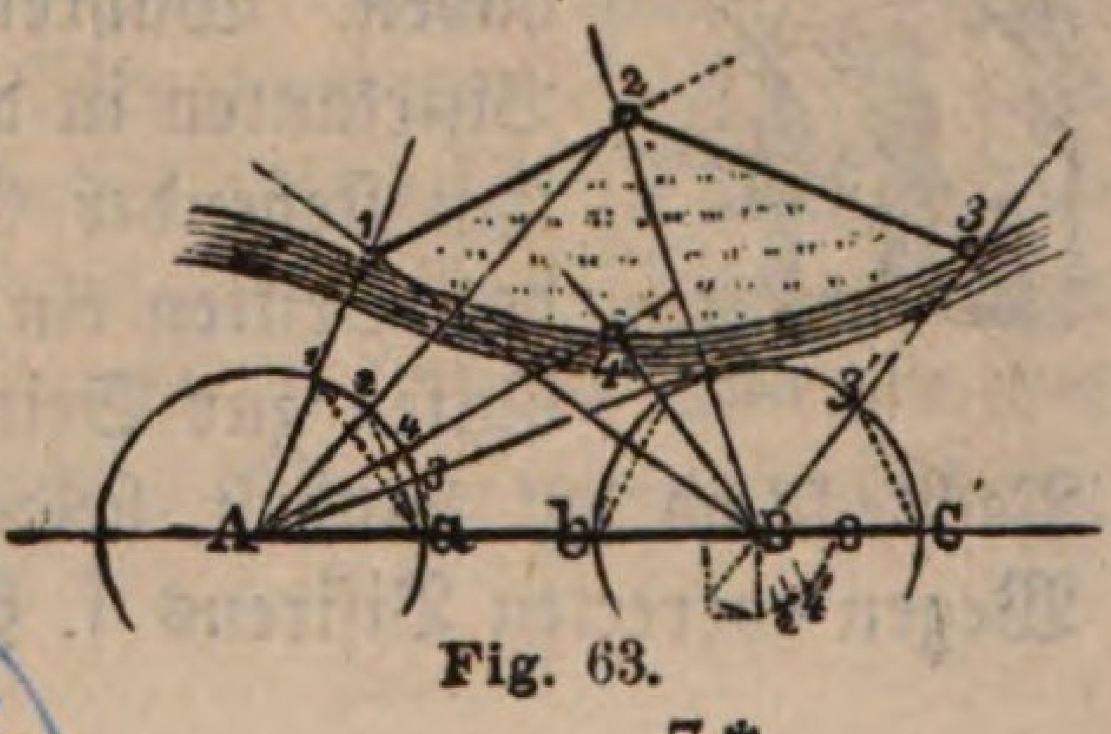

Fig. 62.

Zweite Methode. Mittels Stationirung des Knechts durch eine gehörig lange Nadel. Um auch einzelne Winkel in ähnlicher Weise direkt zu messen, ohne erst für jeden zwei Orientirungsachsen bilden zu müssen, kann man das centrische Stationiren des Knechts auch dadurch bewirken, daß man durch dessen Centrum eine jener im Handel zu habenden ca. 8 Centimeter langen Nähnadeln steckt, dann dieselbe lothrecht mit ihrer Spitze auf des fragln. Winkels Scheitelpunkt stellt, den so angespießten Knecht an ihr herunter auf's Papier leitet u. allda so orientirt, daß der Null- od. Neunzigpunkt mit dem einen Schenkel des fraglichen Winkels zusammenfällt. Natürlich muß dieser Schenkel vorher ausreichend verlängert worden sein. Auch ist es zweckmäßig, diese Stationirnadel vorher mit einem Siegellackköpfchen zu versehen. (Das im folgenden Kapitel beschrieb. kleine Zeughäuschen enthält zwei solcher Nadeln.)

Zusatz. Wegen Verfeinerung des in diesem § behandelten Verfahrens durch das Visirlineal s. Kap. 12.

Als **Winkelauftragsinstrument** od. Transporteur: 1. **indirekt** durch die Chordentafel u. den Millimetermasstab. § 132.

1. Wenn die fraglichen Winkel eine „Rose“ bilden d. i. einen gemeinsamen Pol haben; z. B. wenn mit dem Stativknechte u. seinem Visirlineale von den Endpunkten der Standlinie A u. B aus beobachtet worden die Winkel der Visuren 1,


Fig. 63.

2, 3, 4 ꝛc. gegen die Basis AB, und wenn nun nach der Meßtischmanier des Vorwärts-Einschneidens in der Stube die entspr. Karte gezeichnet, also (nachdem AB mittels Masstabs festgestellt) erst bei A u. dann bei B die betreffenden Visirlinien aufgetragen werden sollen, so verfahre wie folgt: Mit dem Radius 100^{mm} (zur Noth auch mit einer andern Größe r) ziehe um A u. B einen Kreis. Alle oberhalb AB befindlichen Visirlinien betrachte von links nach rechts gerechnet als Strahlen des 1. u. 2., alle unterhalb befindlichen als solche des 3. u. 4. Quadranten u. schreibe zu jeder Visur im Manuale deren Quadrantenziffer u. die aus Knechts Chordentafel abgelesene Chorde ihres spitzen oder Quadrantenwinkels. Nimm dann diese Chorden vom Masstabe ab u. trage sie im zugehörigen Quadranten ein.

2. Wenn die Winkel zerstreut liegen, wie z. B. bei einem mit Bussole od. armirten Stativknechte umzogenen Waldstücke. — 1. Regel: Nimm eine Seite oder eine bei der Aufnahme gleich in's Auge zu fassende u. mit einvisirte Transversale (am besten dann die Meridianlinie) als Basis für die obern u. untern Quadranten; leite nach bekannter einfacher Weise aus den gemessenen Polygonwinkeln die Azimuthal- oder hier besser noch die Quadrantenwinkel aller Umfangsseiten ab, trage diese an einem beliebigen passenden Innenpunkte der zu zeichnenden Figur ganz in voriger Weise um einen Pol herum auf und bilde dann von hieraus erstre Umfangswinkel ꝛc. durch paralleles Abschieben. — 2. Regel (ohne Winkelrose): Schreibe erst aus dem Knechte die 100fachen Chorden zu allen beobachteten Polygon- resp. zu deren Nebenwinkeln an, u. trage darnach die Winkel u. Seiten so aneinander, wie sie draußen der Meßtisch gebildet hätte. Doch ist's hier zweckmäßig, vom Anfangspunkte an zur Hälfte links u. rechts aufzutragen, um den etwaigen Schlußfehler an's entgegengesetzte Ende zu bringen. Auch sind hierbei zwei Zirkel nöthig; der eine, fester zu stellende, bleibt konstant im Radius 100 od. 50; der andere hat die Chorden vom Masstabe abzugreifen.

§ 133. Als **Winkelauftragsinstrument** od. Transporteur: 2. **direkt** durch seinen Theilkreis. (Das NB. des § 131 gilt auch hier.)

Hat man nach 1 od. 2 des vorig. § die fraglichen Visirlinien od. Umfangsseiten u. dgl. auf ihre Azimuthe (welche in der Regel rechtssinnig von 0 bis 360° gezählt zu werden pflegen) oder aber auf ihre Quadrantenwinkel gebracht, so wird der Knecht im Pole der zu bildenden Winkelrose entsprechend stationirt u. orientirt. Das Weitere erhellt aus den beiden vorigen Paragraphen; nur daß man hier, anstatt die vorhandenen Strahlen abzulesen, die aufzutragenden mittelst passender Nadel anzustechen hat.

Zusatz. Dies direkte Abtragen bei zerstreuten Winkeln ohne Rose, wird sich wegen des jedesmaligen umständlichern Stationirens des Knechts i. d. R. nicht lohnen.

C. Als **Winkelkreuz** (in freier Hand).

§ 134. 

Fig. 64.

Das hierbei zu beobachtende Verfahren wird durch beistehendes Bildchen hinlänglich verdeutlicht. Der Vermesser A muß also in diesem Falle noch einen Gehülfen C zur Seite haben. Während er selbst die eine, gleichviel welche, der beiden Visirkanten in der Basisrichtung fest einhält, visirt sein neben ihm stehender Gehülfe mittels der andern Kante den Stab B des Dritten ein. Hat letztrer auch einen Knecht u. einen Gehülfen zur Seite, so können, wenn es sich um Abstecken eines Rechtecks od. dgl. handelt, beide Parteien einander zu Zeiten gleich controliren. Wegen correcten Visirens s. § 125.

1. Zusatz. Um sich zu überzeugen, ob der Gehülfe C sachverständig im Sinne des genannten § visire, lasse man den einvisirten Punkt B so markiren, daß dies von C nicht bemerkt werden kann. Nachdem der Stab B entfernt u. der Knecht gesenkt worden, repetirt man die Visur. Die Abweichung des nun erhaltenen Punktes B darf gegen den ersten nicht über $^1/_4$ % der ganzen Länge betragen.

2. Zusatz. Im Uebrigen ist die desfallsige Knechtsverwendung zu allerlei namentlich landwirthschaftlichen Aufnahms-, Theilungs-, Flächen- u. Winkel-Absteckungs-Arbeiten ganz analog der der andern Rechtwinkelabstecker.

D. Als Horizontal- u. Bergwage in freier Hand. § 135.

(Betreffs der Manipulationen u. Vorsichten beim Visiren s. S. 12 od. 95 u. 104.)

Einige der auf diesem Gebiete am häufigsten vorkommenden Anwendungen finden sich in nebenstehender Figur concentrirt. Die betreffenden Manipulationen werden zur Genüge aus folg. Beispielen erhellen.

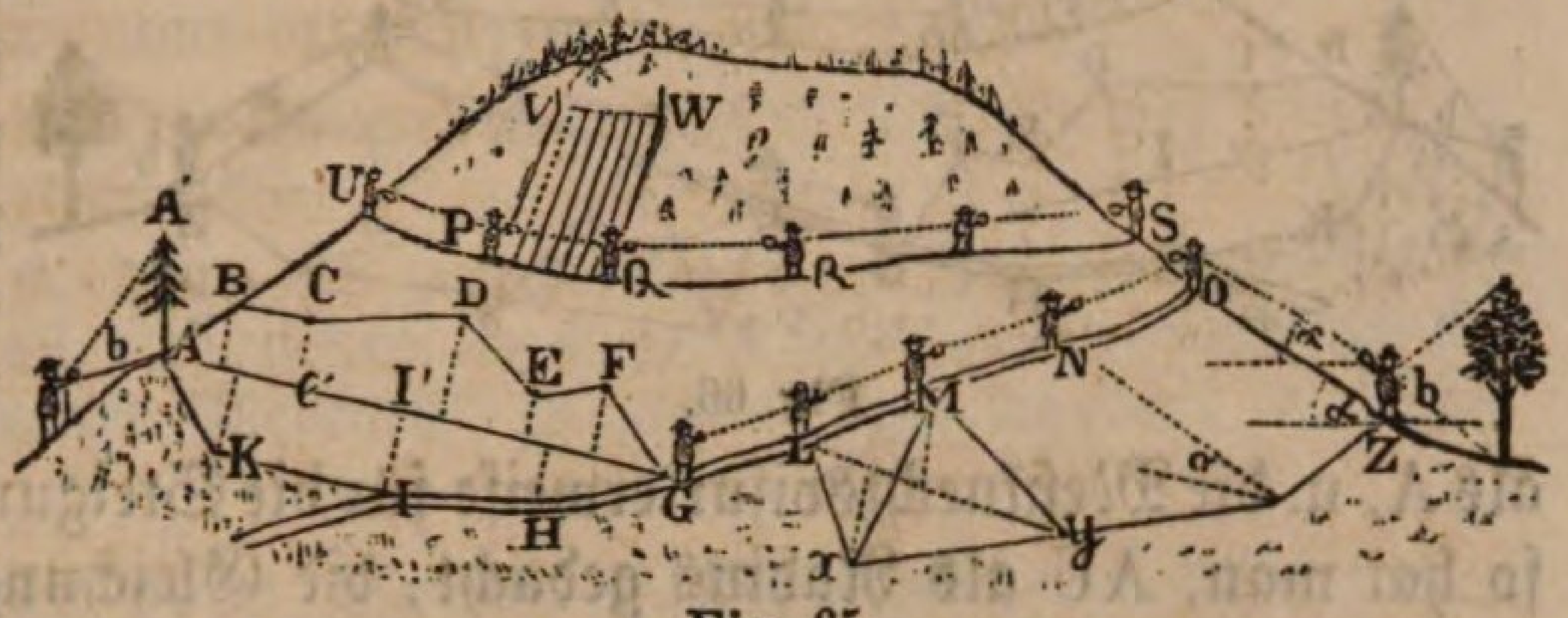


Fig. 65.

Horizontalpunkte u. Horizontalkurven. (Uebungen im Horizontalpunktsschätzen.)

1. Aufgabe. An einem gegenüberliegenden Hange od. dgl. einen Punkt anzugeben, der mit den Augen in gleichem Horizont ist. Auflösung: Bestimme den fraglichen Punkt erst schätzungsweise u. visire denselben nach § 125 ein. Das Pendel muß, mit allenfallsiger Abweichung ab u. zu um ½ (Hundertel) der Tangentenskala, durchschnittlich auf Null spielen. — Spielt es dagegen (in der äußersten Skala) beispielsweise auf die Höhentangente 3, so sagt damit der Knecht: daß der anvisirte Punkt um 3 % seiner Entfernung zu hoch ist. Wenn also letztre 200^m, so wäre nun ein ca. 6^m tiefrer Punkt zu versuchen.

2. Aufgabe. Eine Horizontale an einem Bergabhange abzustecken, z. B. wie in voriger Figur von U nach S. Auflösung: Angenommen, des Vermessers Augenhöhe reiche seinem Gehülfen an das Kinn, so dirigirt erstrer im Geiste der vorigen Aufgabe von U aus letztern so, daß bei der Visur (nach dessen Kinn in P) das Pendel auf Null spielt; stellt sich dann in P an des Gehülfen Stelle u. schickt diesen nach Q, regulirt dessen Standpunkt in gleicher Weise; u. s. f. — Flotter noch u. sichrer geht die Sache vorwärts, wenn auch der Gehülfe einen Meßknecht hat und danach sich selbst mit reguliren kann. Dann bleibt auch besser einer um den andern stehn. Z. B. wenn von U aus P eingerichtet worden, geht erstrer bei P vorbei gleich bis Q; ꝛc. Beim Visiren von P nach Q u. von Q nach P müssen Beider Knechte dann auf Null einspielen.

Höhere u. tiefere Punkte, Steigungs- u. Neigungskurven. § 136.

1. Aufgabe. Höhendifferenzen entfernter Punkte einzuschätzen. Um wie viel liegt ein entfernter Punkt höher als das Auge, wenn bei der Visur nach ihm das Pendel eine Elevation von 7,4° zeigt, und die gegebene oder aus einer Karte entnommene oder aber geschätzte Horizontalentfernung 1000^m beträgt? . . Letztre als Radius genommen, ist die gesuchte Höhe die 1000fache Tangente v. 7,4°; also, wenn die schlichte Ablesung der Tang.-Skala genügt, $= 1000 \times 0{,}129 = 129^m$. (Wegen genauerer Tang. s. Kap. 6.)

2. Aufgabe. Höhen- od. Tiefendifferenzen zwischen direkt meßbaren Terrainpunkten zu bestimmen (F. 66). Um wieviel liegt die Horizontale SU höher als der Punkt Z, wenn ZS = 120 Meter und des Knechtes Pendel bei der Visur parallel ZS den Höhenwinkel α zu 15,3° anzeigt? Auflös.: ZS als Radius gedacht, wird die gesuchte Höhe der 120fache Sinus von 15,3°; also = 120 × 0,264 = 31,7 Meter.

3. Aufgabe. Senkrechte Höhen an Hängen abzumessen. Z. B. den Anfangspunkt U einer Horizontalkurve zu bestimmen, welche um ein gewisses höher liegt, als ein bestimmter Terrainpunkt A der nebenstehenden Figur! Auflös.: Angenommen, U solle 50 Met. höher liegen als A, u. die Meßknechtsvisur erweise für die Steigung AU ꝛc. einen ∠ v. 21,9°, so hat man, AU als Radius gedacht, die Gleichung AU . *sin.* 21,9° = 50^m^, u. daraus AU = $\frac{50}{sin. 21{,}9^\circ}$ od. = $\frac{100}{ch. 43{,}8^\circ}$; laut Chordentafel = $\frac{100}{0{,}7462}$ (laut Reciprokentafel) = 134,1. Also hätte man eine schiefe Strecke v. AU = 134 Meter aufwärts abzumessen.

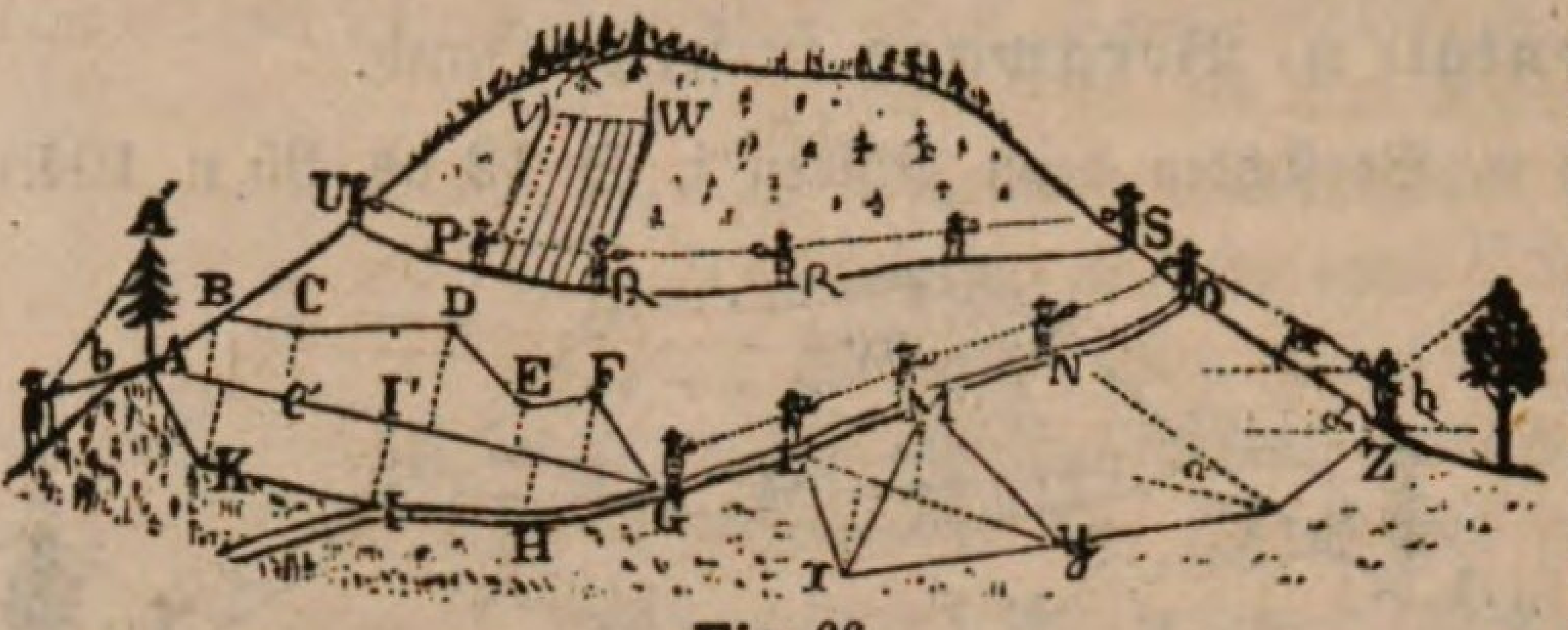


Fig. 66.

4. Aufgabe. Wege u. Gräben nach bestimmten Neigungswinkeln od. aber Neigungsprocenten abzustecken; z. B. (Fig. 66) von G aus einen Weg mit 5% Steigung bis zum Berggipfel! — Auflös.: ganz wie § 135, Aufgabe 2, mit dem einzigen Unterschiede, daß das Pendel der operirenden Meßknechte nicht auf Null sondern auf die Tangente 5 einspielen muß.

§ 137. **Falllinien der Berghänge; Horizontalreduction** natürlich gemessener Neigungslinien u. Neigungsflächen; u. umgekehrt: Reduction aus dem Horizontalen in's Schiefe. S. Fig. 66.

1. Aufgabe. Die Falllinie der Feld- od. Waldbestandsfläche PW abzustecken. Auflös.: Mit dem Knecht als Horizontalwage (§ 135) bestimme erst die Horizontalbasis PQ u. dazu mit dem Knecht als Winkelkreuz die rechtwinklig aufsteigende PL od. QW, deren jede die gesuchte Falllinie darstellt.

2. Aufgabe. Den Böschungswinkel einer bestimmten Bergstelle z. B. PW zu bestimmen. Auflösung: Suche erst nach voriger Aufgabe die Richtung der Falllinie u. visire deren Neigungswinkel ein.

Zusatz. Die Visurrichtung natürlich parallel zur Falllinie, also von P od. Q nach einem in V od. W in Augenhöhe markirten od. gedachtem Punkte. — Rascher und sichrer, wenn beide Arbeiter P u. Q Meßknechte haben und sich gegenseitig controliren können.

3. Aufgabe. Die wirkl. Größe einer Hangfläche auf die Horizontale od. auf den Grund zu reduciren u. umgekehrt. Z. B.: Bei der nach vorigen beiden Aufgaben abgesteckten u. einvisirten Falllinie zeigte das Pendel einen Böschungswinkel von 30° u. damit also gleichzeitig den 100fachen Cosinus 86,6 u. die 100fache Sekante 115,5. So ist damit zugleich gesagt: Die Horizontalfläche daselbst beträgt 86,6 Procent der wirklichen Hang- u. Bodenfläche; od. aber: letztre ist 15,5% größer als die von der Meßtisch- od. sonst einer Horizontalaufnahme bezifferten od. Kartengröße.

1. Zusatz. Zur Horizontalreduktion: Statt 86,6 kann man auch setzen 100—13,4 u. demzufolge auch sagen: der Horizontalgrund ist gegen die wirkliche Bodenfläche kleiner um 13,4 % der letztern (= 15,5 % des erstern).

2. Zusatz. Zur Schiefreduktion. Sollte z. B. PW ein Probeplatz von netto 100 □-Meter Horizontalfläche sein, so müßte dessen wirkliche Bodenfläche größer sein im Verhältniß der vom Pendel angegebenen Außensekante ihrer Falllinie, also hier um $15^1/_2$ % der Grundfläche; d. i. = 115,5 □-Meter.

4. Aufgabe. Mehr u. weniger ungleich geneigte Distanzen ohne Staffelmessung (also durch Cosinuirung, § 84) auf ihre Horizontalgröße zu bringen. Z. B. die Distanz GO Fig. 66. Auflös.: Beobachte den Neigungscosinus jeder Kettenlänge und multiplicire mit letztrer die Summe der erstren.

1. Zusatz. Bei ungleichen Kettenlängen ist natürlich jede für sich mit ihrem Neigungscosinus zu multipliciren.

2. Zusatz. Am besten, u. dann der zeitraubendern u. meist auch unsicherern Staffelmessung mit Kette überall vorzuziehen, wenn jeder Kettenzieher einen zweiten Kettenstab u. daran einen armirten Meßknecht zu gegenseitiger Controle 2c. besitzt.

E. Als Hipsometer oder Baum- u. Berghöhenmesser (aus freier Hand).

Allgemeine Regeln zur Meßknechtshipsometrie. § 138.

1. Denkt man sich vom Stationspunkte A aus mit der horizontalen Standweite AH = a einen Kreis beschrieben, so erscheint die Oberhöhe HC als die (a-fache) Tangente des Höhenwinkels α (spr. alfa) und die Unterhöhe HB als die (a-fache) Tangente des Tiefenwinkels β (spr. beta); während die Schiefdistanz b (vom Auge a bis zum Abhiebspunkt B) die a-fache Sekante ihres Neigungswinkels β darstellt. Sonach gilt für die Scheitelhöhe BC (wie überhaupt für jede mit dem Knechte in ihrem Ober- u. Unterpunkte anvisirte Höhe) bei horizontal gemessener Standlinie die einfache Regel: „Summe der Höhen- u. Tiefentangente × Standweite;" oder BC = (Tang. α + Tang. β) a.

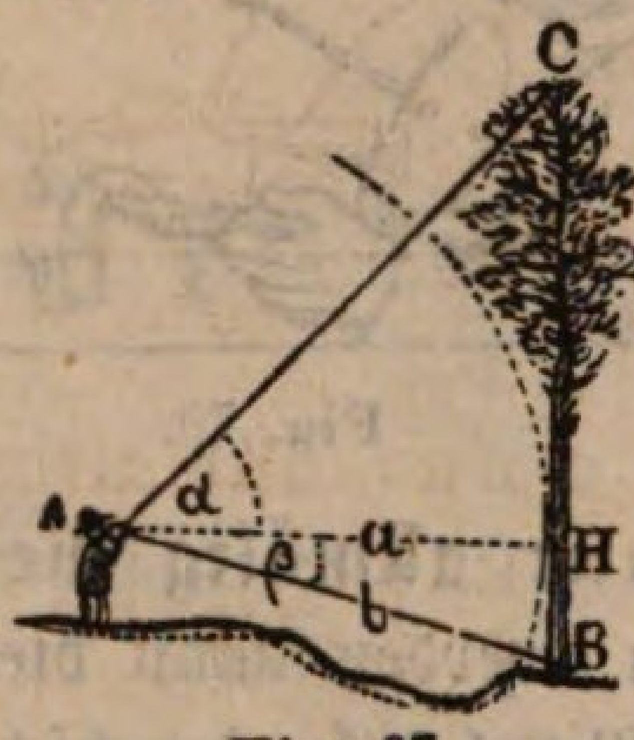


Fig. 67.

2. Denkt man sich dagegen die Schiefdistanz AB = b als Radius, so erscheint bekanntlich dann in Bezug auf β das Stück BH als (b-facher) Sinus von β und AH od. a als (b-facher) Cosinus von β. Letzterer Werth in vorige Formel substituirt, besagt: Rechne bei schiefgemessener Standlinie ganz nach Regel 1... (tng. α + tng. β) b u. mindere dann das gefundene Höhenresultat entweder durch Multiplikation mit dem Cosinus des Schnur- od. Bandneigungswinkels β; od. (noch flotter) um so viele Procente, als dem bei der Visur nach B in 2 Ziffern abgelesenen Cosinus zum vollen Radius d. i. zu 100 fehlen. (Bei Schiefdistanzen unter 30° kann man das Minderungsprocent kürzer u. meist genau genug an dem Werthe erkennen, um welchen die neben der Cosinusskala befindl. dreiziffrig gelesene Sekante den ganzen Radius od. die Zahl 100 übersteigt.

3. Indem das Meßknechts-Pendel zu jeder Höhen- und Tiefenvisur mit Einem Blicke Gradmas, Tangente, Cosinus u. Sekannte zeigt, so wird die Flottheit u. der Umfang seiner desfallsigen Leistungen Jedermann begreiflich finden. Wo sich die fragliche Höhe aus lauter Höhen- od. lauter Tiefentangenten bildet, wie z. B. ersteres bei Fig. 68, da hat man statt deren Summe selbstverständlich deren Differenz zu nehmen. —

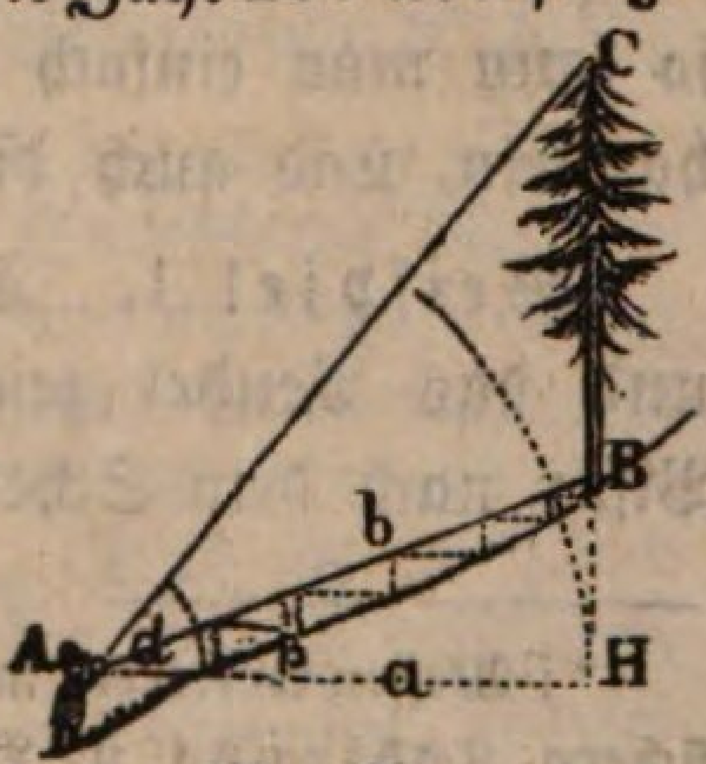


Fig. 68.

Zusatz zu 1, 2, 3. Da ein Irrthum nicht entstehen kann, lese man aus den betreffenden Skalen deren Werth ohne Rücksicht auf das Komma 2c. immer als ganze Zahlen ab.

4. Zur **Standlinienmessung** in Einem Zug dient zweckmäßig eine gefirnißte und womöglich nicht gedrehte, sondern geklöppelte 50 Meter lange Schnur, in welcher von Meter zu Meter ein Knoten und von 5 zu 5 Meter ein rothes wollenes Zeichen eingezogen. Noch besser als Schnur ist gut gefirnißtes leinenes Band. Da aber selbst auch dieses dem Verziehen unterworfen, so hat man

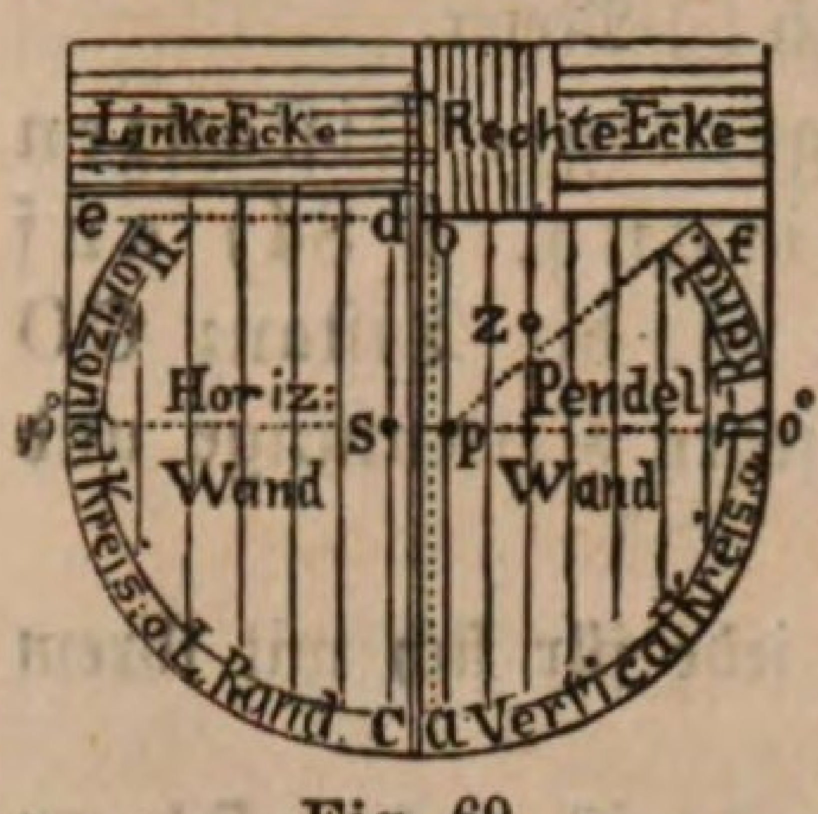


Fig. 69.

seinen Längemesser stets von Zeit zu Zeit zu prüfen und, soweit nöthig u. thunlich, zu berichtigen. — Die Standweite (die horizontale wie schiefe) mache man möglichst = einer runden Zahl.

5. Näheres wegen besonderer **Manipulationen**, Vorsichten und Prüfungen vor und bei der eigentlichen Handhabung des Knechts s. S. 11 flg. Hier sei nur wiederholt: a) Bei Verwandlung der Meßknechtstafel (Fig. 69) in's Visirinstrument ist stets die rechte Oberecke **unter** die linke zu schieben; das umgekehrte würde die Kante bei b überspannen. (Achte also auf die Regel am Grunde der Meßknechtstasche.) b) Beim Freihandgebrauche (Fig. 69) ist der Knecht mit möglichst gestrecktem Arme zu halten, damit man besser gleichzeitig sehen kann, ob das Pendel, wie es soll, noch ein ganz klein


Fig. 70.

wenig von der Wand ab- und zugleich hinlänglich ruhig steht. (Bei beweglichem Pendel verhilft man demselben etwas mit der rechten Hand zur Ruhe.) Beim rohen (d. h. nicht mit den Stiften seines Zeughäuschens armirten) Knechte muß beim Abkommen Anfangs- u. Endpunkt der Visirfuge ab Fig. 70 od. auch der Visirfläche cde Fig. 69 sich vollkommen decken. Und um das Pendel zum correcten Anliegen und Ablesen zu bringen, darf man **ja nicht plötzlich**, sondern muß unter fortwährend genauer Visireinhaltung nur **allmälig** wenden. Bei flotter Wiederholung u. ruhigem Wetter sollen u. werden dann die Pendelstände gegeneinander nicht über $^1/_2{}^0$, gegen ihr richtiges Mittel also durchschnittlich nicht über $^1/_4{}^0$ differiren. Das Fünftel der Summe von 5 Visuren muß demnach eine Genauigkeit geben, wie man sie, in der wirthschaftlichen Praxis wenigstens, ziemlich selten braucht. — c) Tiefenvisuren über 25° sind in umgekehrter Richtung (von b nach a), ohne Stativ also an der rechten Hand zu visiren. — d) Ein einigermasen ruhiges Blut erlangt sehr schnell die Uebung, mit dem blosen Knechte und aus freier Hand bei etwa einmaliger Repetition die Baumhöhen bis auf durchschnittlich einen Fuß unsicher (nicht zu verwechseln mit unrichtig), mit Armatur aber und Stativ bis auf weniger als ½ Fuß genau zu ermitteln.

§ 139. Gewöhnliches (Baum-) Höhenmessen.*)

[Da ein Irrthum darüber, ob das Resultat 2- od. 3ziffrig sein müsse, nicht möglich, so kann man einfach alle Ablesungen, mit Weglassung des Komma, als Ganze behandeln, und auch die etwaige Null der Standlinie vernachläßigen.]

Beispiel 1. Die horizontal gemessene Standweite SM sei 90 Fuß, und das Pendel zeigt in der äußersten oder Tangenten-Skala bei der Visur nach dem Scheitel B auf 67, nach dem Richtpunkt C (s. S. 49 u. 50) auf 46

*) Wegen weiterer, mehr forstlicher Ausdehnung der Meßknechts-Dendrometrie zur flotten und sichern Kubirung u. Werthsschätzung stehender Hölzer nach Total- u. Sortengehalt mit u. ohne Meßknechts-Richtrohr: s. Verf.'s Forstls. Hülfsbuch für Schule u. Praxis nach neuerem Stande der Wissenschaft u. Erfahrung ꝛc., 2. Aufl. 1869; oder dessen Taschenauszug „Compendiöser Forsttaxator" 4. Aufl. 1869.

und bei der Tiefenvisur nach dem Abhiebspunkt A auf 11. — Daraus folgt einfach a) Totalhöhe AB [aus 67 + 11 = 78, mal 90] = 78 . 9 = **70,2** Fuß; oder b) Scheitelpunkts-Oberhöhe MB (aus 67 . 9) = **60,3** Fuß. c) Richtpunkts-Oberhöhe aus 46 . 9 = $41^1/_2$ Fuß.

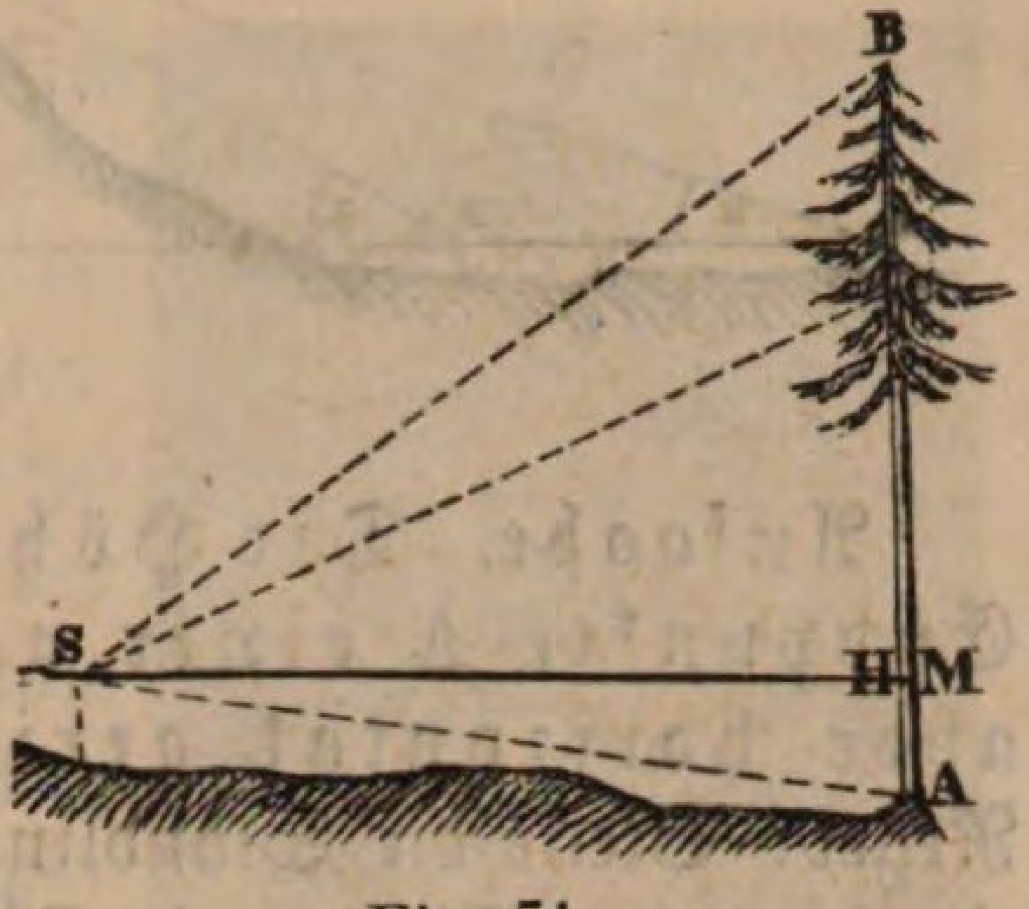


Fig 71.

Beisp. 2. Fig. 72. Vermöge des am Abhiebe A befestigten Bandes bestimmte man die schiefe Standlinie AS zu 110 Fuß; das Pendel ergab bei der Scheitelvisur SB die Tang. 85 und bei der Visur nach dem Band-Anfangs- (= Stamm-Abhiebs-) punkte die Tang. 21 mit dem Cosinus 98 od. der Sekante 102; wonach also die Horizontale SH um 2 % kleiner ist als die Schiefe SA. — Ohne Rücksicht auf die Schiefe der Bandlänge wäre also AB [aus 85 minus 21, mal 11] = 64 . 11 = $70^1/_2$ Fuß; was aber, wegen Cos. = 98, um 2 %, d. i. 0,7 . 2 = 1,4 Fuß zu mindern; woraus leicht Totalhöhe AB = **69** Fß.

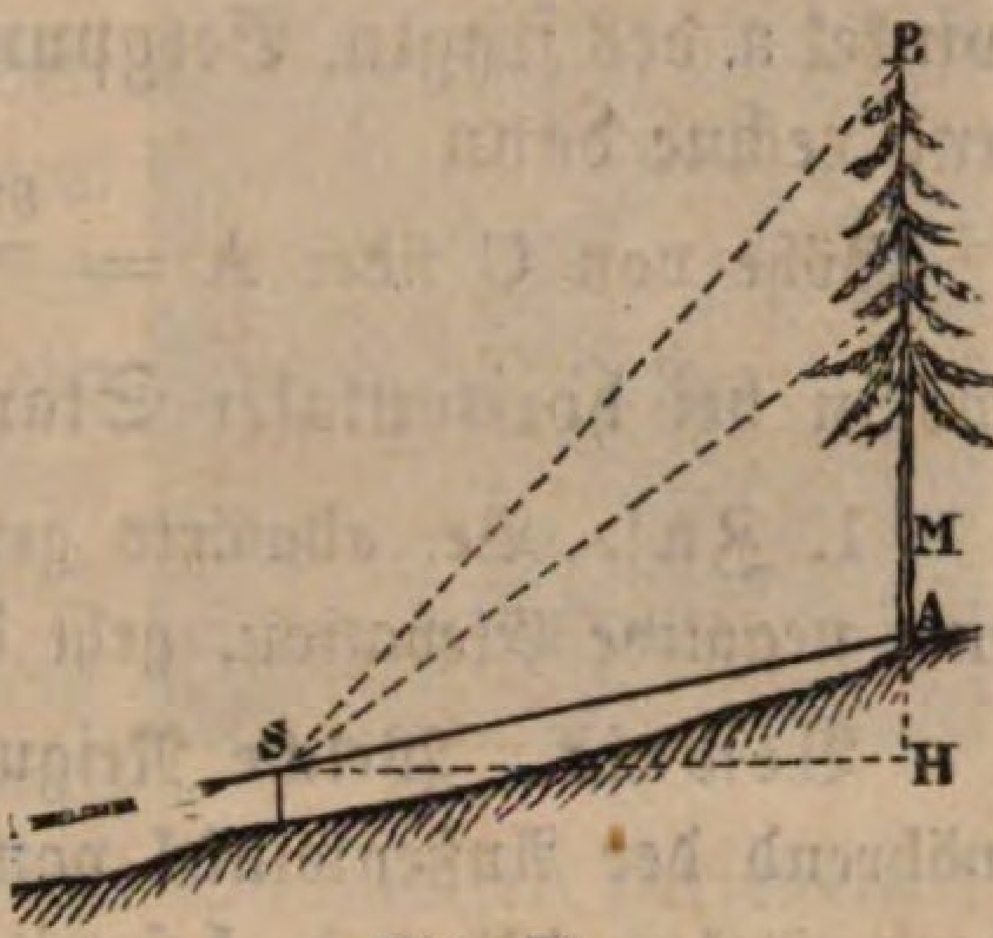


Fig. 72.

Zusatz. Wäre auch die Höhe des Fußpunkts A über dem Stationspunkte bei S zu wissen verlangt, so hat man aus der beobachteten Tangente 21 zunächst 21 . 11 = 23,1 Fuß, was um 2 % gekürzt = 23,1—0,5 = 22,6 Fuß gibt, wozu noch die Augen- od. Stativhöhe bei S zu rechnen. — Hätte man gleich den Winkel ASH mit abgelesen, = 11,8°, so konnte AH gleich als der 110fache Sinus von 11,8°, direkt aus Meßknechts Sinusskala (= $0{,}20_5$) abgeleitet werden, wonach HA = 0,205 mal 110 = 22,6 Fuß.

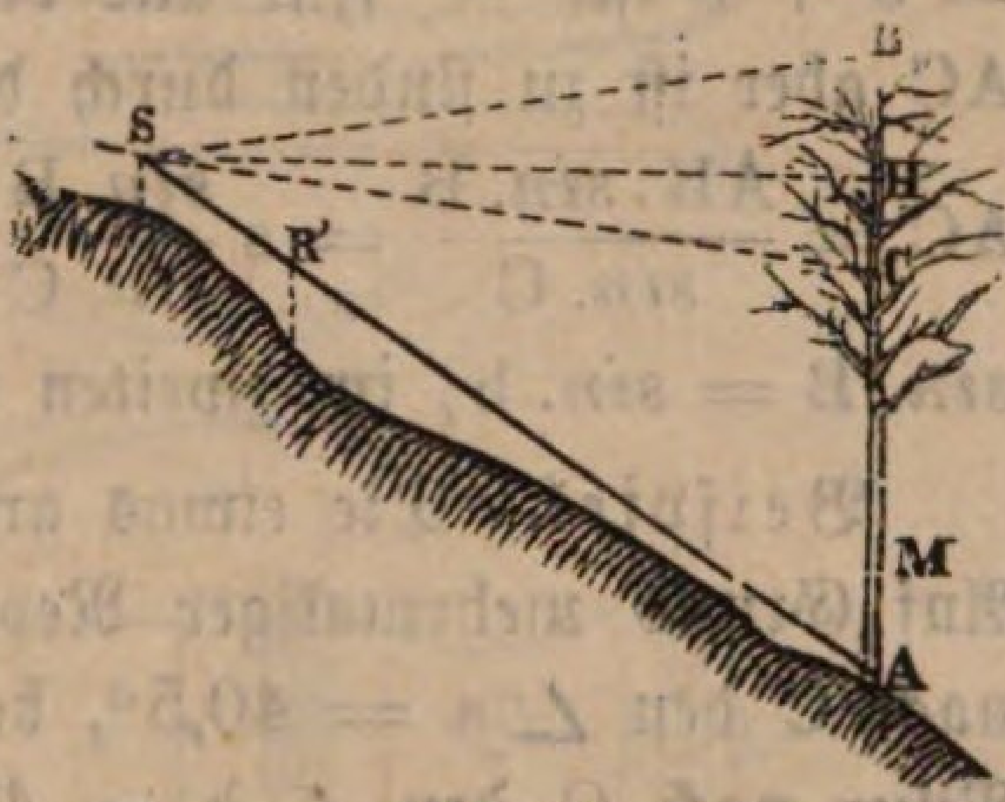


Fig. 73.

Beisp. 3. Um den eigentlichen Scheitelpunkt einer Buche täuschungsfrei zu sehen, ward der Standpunkt S, Fig. 73, so gewählt, daß das am Fußpunkte A befestigte Band die Schiefdistanz AS = 120′ zeigt. Der Knecht erwies bei der Scheitelvisur die Höhen-Tangente 18 u. bei der Fußvisur SA die Tiefen-Tangente 65 mit dem Cosinus 84 (= 16 % unter 100). — Daraus folgt zunächst aus (65 + 18 oder) 83 × 12 die Höhe 99,6, welche noch mit 84 % zu multipliciren od. um 16 % zu mindern; was 83,7 Fuß ergibt.

Beisp. 4. Messung der Richtpunktshöhe. Hat man den Richtpunkt C mit bloßem Auge od. Richtrohr bestimmt*), so verfährt man in allen Fällen (Fig. 71, 72, 73) gerade so, als wenn R der Scheitelpunkt wäre. Z. B. Wenn in Fig. 73 die Visuren nach C wie A Tiefenvisuren mit den (Tangenten-)Ablesungen 15 u. 65 (dazu Cos. = 84) waren, bei AS = 120; so folgt aus (65—15) . 12 = 60; und um 16 % gemindert, AC = 50 Fuß.

Berghöhenmessung. (Erweiterung hierzu s. Math. Brieftasche Kap. 2.) § 140.

NB. Aus freier Hand freilich mehr nur als eine geometrisch begründete Schätzungsoperation anzusehen, vollends wenn man etwa (Fig. 74) die Standferne AB = s nur abgeschritten hätte. Aber auch dann noch als praktisch-trigonometrische Uebung für Schüler sowie für die Praxis zur Augenschätzung von Berghöhen immerhin nicht zu verachten. — Die Höhenwinkel a u. b sind thunlichst vielmal zu repetiren, da, vollends bei sehr kleinem c = b — a, ein Fehler von $^1/_{10}$ Grad im c schon ziemlich einflußreich werden kann; worüber man sich durch Proberechnung aufklären wolle, um für genauere Zwecke die Standlinie AB möglichst lang u. die Winkel a, b u. c möglichst fein zu bemessen.

---

*) Näheres über dies Rohr s. in Verf.'s „Gesetz der Stammbildung" od. im „Forsttaxator" Abth. 2.

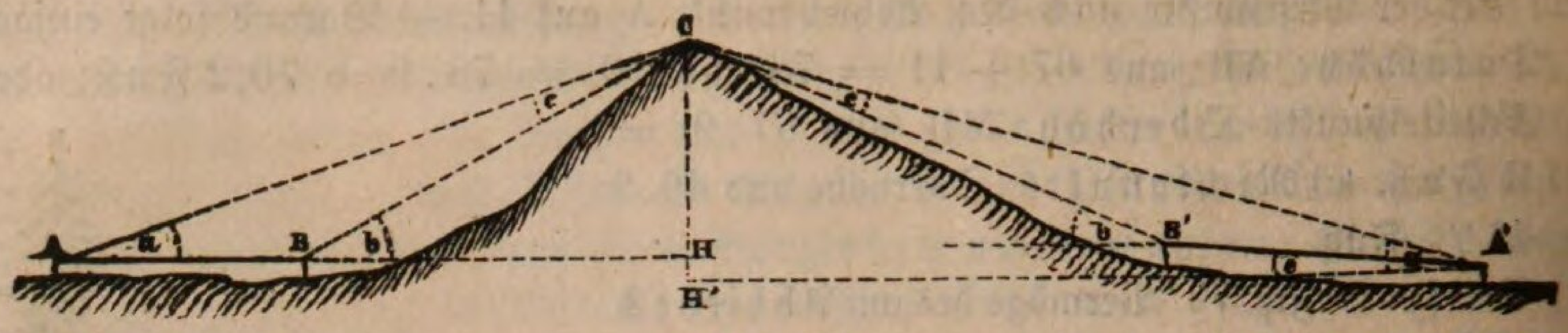


Fig. 74.

Aufgabe. **Die Höhe des Punktes C über dem entferntern Endpunkte A einer nach der Höhenachse CH aufwärts oder aber horizontal gerichteten Standlinie AB zu messen.** — Regel: Stecke die Standlinie AB möglichst lang ab; visire gut u. wiederholt ein in A den Höhen- od. Tiefenwinkel e der Standlinie AB, u. den Höhenwinkel a des fragln. Bergpunkts, u. dann in B den Höhenwinkel b des letztern; und rechne dann

$$\text{Höhe von C über A} = \frac{sin.\ a\ sin.\ (b-e)}{sin.\ (b-a)} \cdot s = \frac{ch. 2\,a\ ch. 2\,(b-e)}{ch. 2\,(b-a)} \cdot \frac{s}{2};$$

worin bei horizontaler Standlinie das e von selbst in Wegfall kommt.

1. Zus. Bei abwärts gerichteter Standlinie, wo also A höher als B, und e eine negative Elevation, geht das $-e$ der Formel über in $+e$.

Beweis. Welche Neigung auch AB habe, immer ist $\angle C = c = b - a$; während der Außenwinkel von B, d. i. der Nebenwinkel des Winkels ABC, bei horizontalem $AB = b$, bei mit e^0 aufsteigendem $= b - e$ u. bei mit e^0 absteigendem $= b + e$ ist. — Für alle drei Fälle ist die fragl. Höhe von $C = AC \,.\, sin.\ a$; AC aber ist zu finden durch den Sinussatz $AB : AC = sin.\ C : sin.\ B$; also $AC = \frac{AB \,.\, sin.\ B}{sin.\ C} = s\,\frac{sin.\ B}{sin.\ C}$, folgl. Höhe $= s\,\frac{sin.\ B}{sin.\ C}\,sin.\ a$; wobei im erstern Falle $sin.\ B = sin.\ b$, im zweiten u. dritten aber $= sin.\ (b-e)$ u. $sin.\ (b+e)$.

Beispiel. Die etwas ansteigende Standlinie A'B' ward 200' lang gewählt. Auf Grund mehrmaliger Repetition ergab dann der Knecht in A' bei der Visur nach C den $\angle a = 40{,}5^0$, bei der nach B' den $\angle e = 22^1/_4{}^0$, u. in B' bei der Visur nach C den $\angle b = 45^3/_4{}^0$. Man soll die Höhe des Punktes C über A' mittels der schärfer arbeitenden Chordentafel berechnen.

$$\text{Fragl. Höhe} = \frac{ch.\ 81^0\ ch.\ 47^0}{ch.\ 10^1/_2{}^0} \,.\, 100 = \frac{1{,}299 \,.\, 0{,}797}{0{,}183} \,.\, 100 = 567 \text{ Fuß};$$ wozu noch die Augenhöhe des Beobachters, mit etwa 5 Fuß; somit in Summa 572 Fuß.

2. Zus. **Berghöhenmessungen bei seitwärts zu legender Standlinie:** s. den 2. Anhang zu Kap. 12.

F. Als Zeitmesser u. Sonnenuhr in freier Hand,

jedoch nicht ohne mit einem Stiftchen armirt zu sein: siehe folgendes Kapitel.

Kap. 11. Der Ingenieur-Meßknecht mit kleiner Armatur

d. i. mit seinem „kleinen Zeughäuschen" an freier Hand od. einfachstem Stativstabe.

Im Allgemeinen u. zur Vorbereitung. Um die vorigen Anwendungen für gewisse Zwecke theils unabhängiger machen, theils verfeinern u. auch erweitern zu können, wird es sich meist ausreichend lohnen, wenn unser Meßfreund seinem so dienstwilligen Knechte Gelegenheit gibt, sich mehr auf eigenen Fuß zu stellen und, an einfachstes Stativ geschraubt, sich zu emancipiren, als Winkelkreuz: von der Umständlichkeit u. Unsicherheit eines zweiten Gehülfen, und als Hipsometer rc. von einer etwa unruhig werdenden Luft u. Hand wie von den möglichen Fehlern beim Wenden. Dann aber wird's für manche Fälle zugleich auch wünschenswerth, die bloßen Visirkanten zu verfeinern durch angemessene Nadeln u. Diopterchen. All dieser kleine Kram findet sich vereint in einem unter dem Namen „Kleines Zeughäuschen" cursirenden Etui*), enthaltend den Anschraubstift R (mit Preß mutterchen S u. 2 Friktionsscheibchen F) nebst Klammer K, einer hinlänglichen Anzahl (bisher 8) von mit Querbalken versehenen Visirstiften AB, zwei Doppeldiopterchen D u. dazu noch mehrere Kleinigkeiten, § 141.

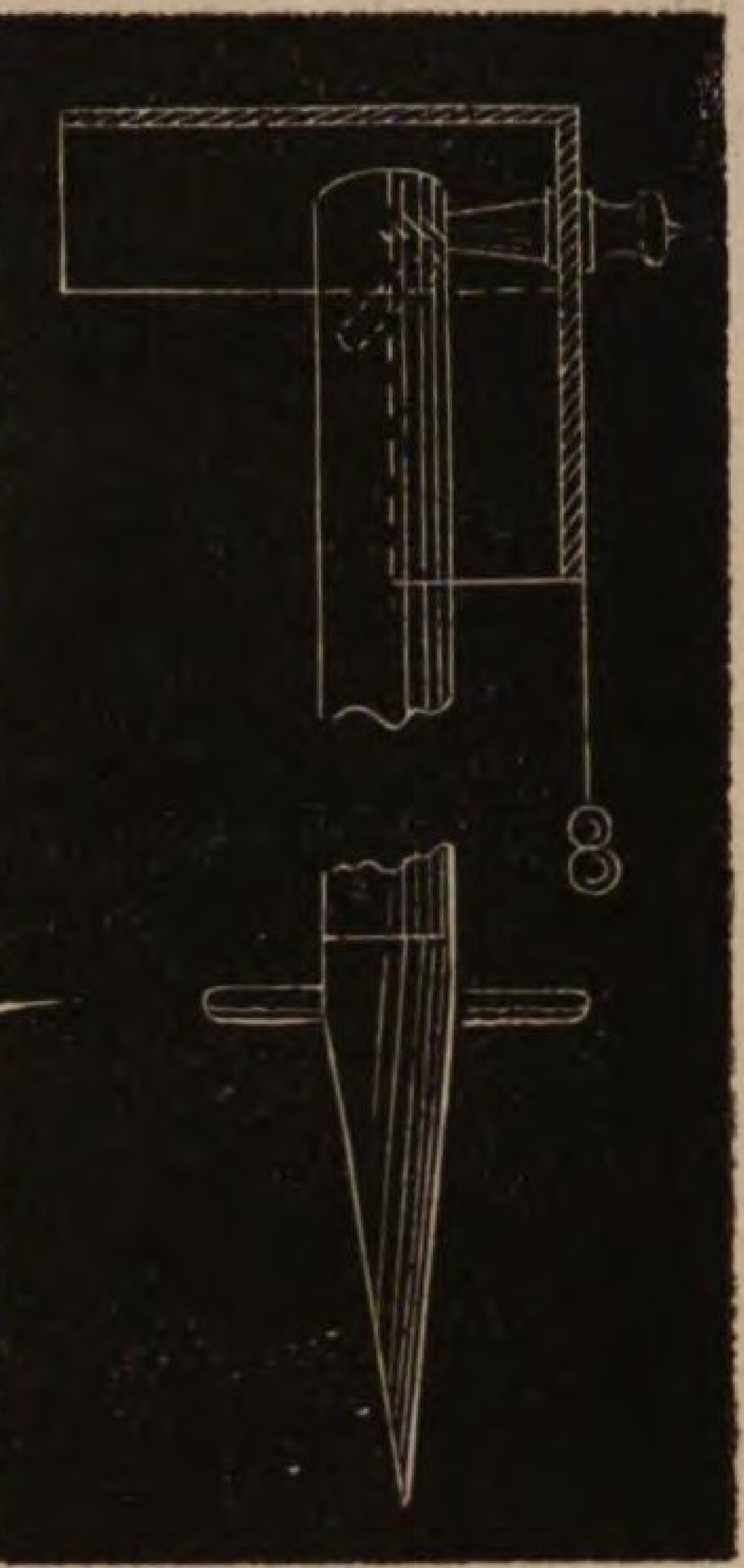


Fig. 75.

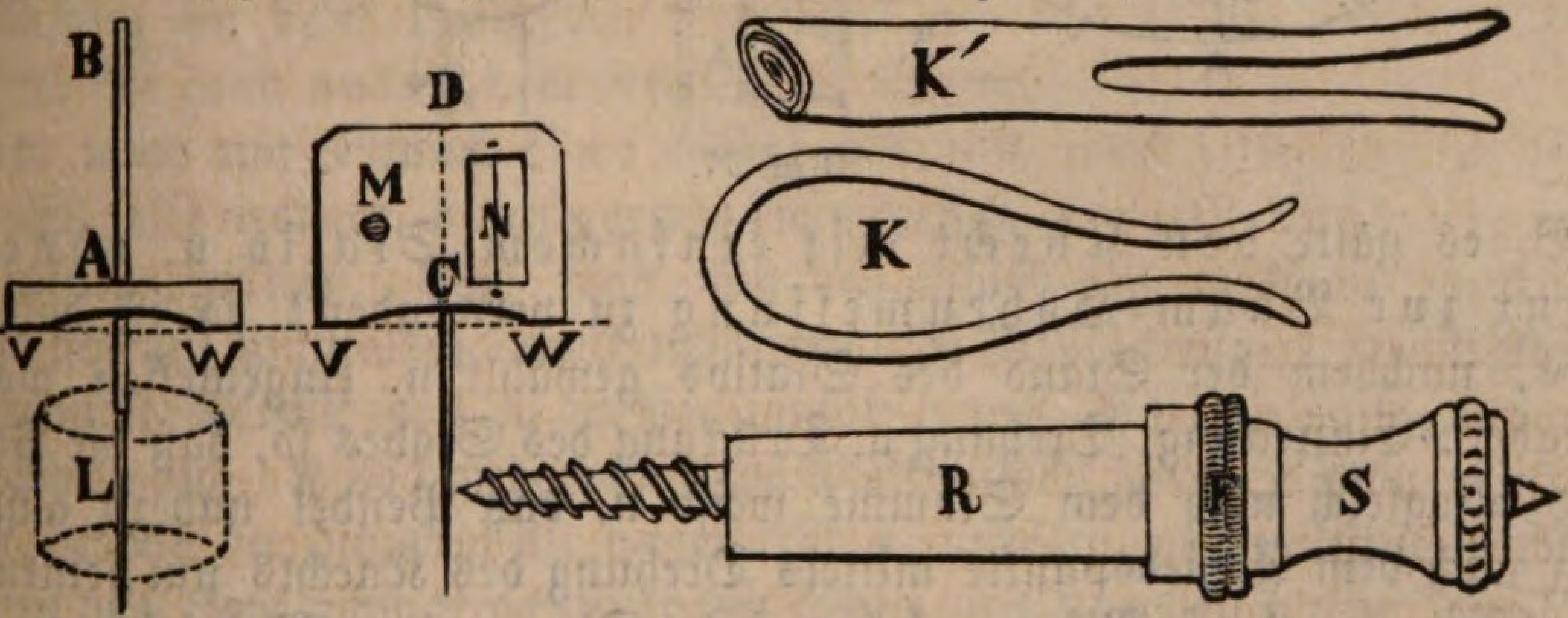


Fig. 76.

als: Reserveklammer, Reserveloth, Stationirnadeln; und Korke, die als Mutterchen zum Festziehen der Stifte dienen.

Die Vorbereitung des Knechts zur Aufnahme dieser seiner kleinen Armatur ward bereits im vorigen Kapitel S. 96—98 behandelt. Hauptpunkte waren: 1. Eine hinlängl. starke Nähnadel mit haselnußgroßem Siegellackkopfe; 2. Prüfung u. Justirung derjenigen 3 Punkte der Horizontalwand, die zur Aufnahme der 3 Winkelkreuzstifte dienen sollen; 3. Senkrechter Durchstich dieser Punkte mit vorbemerkter Nadel; 4. Auf der Pendelwand Fig. 69: Prüfung resp. Correction der durch den ersten Radius EN genau senkrecht gehen sollenden Richtlinien ab, u. Durchstich dieser Linien an ihren Enden, behufs Aufnahme des Schattenstifts od. der 2 Visirstifte od. der 2 Diopterchen; und 5. Durchlochung der Pendelwand durch eine 2^{mm} weite Oeffnung an geeigneter Stelle S (ca. 3 Centimeter rechts oberhalb E; Figur 77$_1$ u. 77$_3$) zum Anspießen u. Anschrauben des Knechts am Querdorn S des Stativkopfes Fig. 76 u. 78. Gegenwärtig werden alle Knechte gleich mit dieser letztern

*) Wegen Bezug u. Preis desselben, insbesondre für Schulen in Parthieen, s. die beigeschlossene desfallsige Anzeige.

Durchlochung versehen u. ausgegeben; die ganz starken od. Doppelknechte soga mit zwei derlei Löchern, davon das untre für den Fall, daß man mit den schwerern Bussolendiopter Winkelmessungen ausführen will. (S. Kap. 12.)

§ 142. **Der Stativknecht** am einfachen Stabe. (Anwendbar natürlic nur in entspr. weichem Boden.) Um solchen zu bilden, bohre den Meßknechts Anschraubstift R des kleinen Zeughäuschens Fig. 76 thunlichst hoch am Kopf eines nach Art der Meßknechtstäbe mit Eisenspitze versehenen, entsprechend starke u. im Ganzen etwa bis an's Kinn reichenden Stockes möglichst senkrecht gege dessen Achse ein. Vgl. Nr. 3 u. 4 in folgender Figur. Wird dann der Knech mittels des Pendelwandlochs zwischen die Friktionsscheibchen dieses Querstift gepreßt, dann zur Würfelecke formirt u. in dieser Form mittels Klammer fest gehalten*), so kann man ihm nun leicht jede Stellung u. Richtung geben

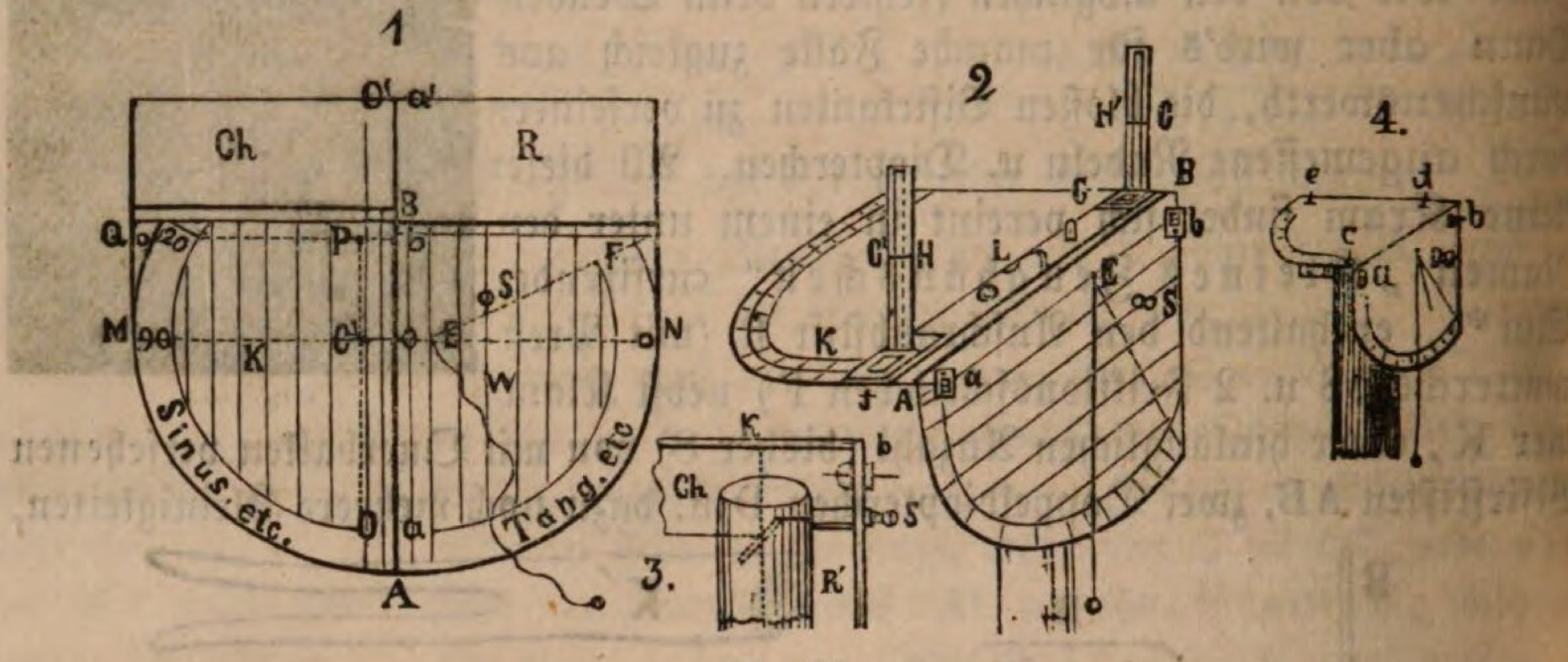


Fig. 77.

Z. B. es gälte den Knecht mit einfachem Stativ u. ohne Armatur zur Baum-Höhenmessung zu verwenden! so ist dabei der Aktus, nachdem der Stand des Stativs gewählt u. eingemessen worden, folgender: Einsteckung, Drehung u. Drückung des Stabes so, daß die Pendelwand alsogleich nach dem Stamme weist u. das Pendel nahezu anspielt; Visur nach dem Abhiebspunkte mittels Drehung des Knechts um seinen Anschraubstift; u. ebenso Visur nach dem betr. Oberpunkte. Wobei jedesmal die Tangente abzulesen. Die ganze Operation darf nicht drei Minuten dauern!

Die Horizontalstellung des Knechts ohne Wasserwage ist bei correct formirter Würfelecke in einer für viele Fälle ausreichenden Weise dadurch zu bewirken, daß man das Pendel zu recht exactem An- u. Einspielen bringt; erstres durch Seitwärtsdrücken des Stabes, letztres durch sanftes Drehen des Knechts, schließlich unter Zuhülfenahme ganz schwachen Klopfens auf denselben.

Zusatz. **„Doppelknecht.“** Wie schon oben zu bemerken Veranlassung gewesen, empfiehlt es sich, zu einigermasen größern Arbeiten als Stativknecht nicht die gewöhnliche od. schwache sondern die stärkste u. steifste, auf 3 Millimeter dicke sogen. Steinpappe aufgezogene u. unter dem Namen „Doppelknechte“ bekannte Sorte zu verwenden. Der vollkommenere Meßknechtsfreund kann beide Arten, gegenseitig sich schonend u. ergänzend, ganz gut mit Vortheil nebeneinander führen; die schwächsten besonders für's Portefeuille u. zum Freihand- u. Stubengebrauch u. als Transporteur 2c. 2c.; die stärksten für geodätische Arbeiten mit Stativ 2c.

*) Sollte diese Drahtklemme einmal abhanden kommen, so kann man sich leicht Ersatz verschaffen, indem man ein grünes Zweigstiftchen nach Art der Wäschklammern ausschneidet.

Die Visirstifte u. der damit verfeinerte Knecht als Winkelkreuz u. Höhenmesser. (S. Fig. 76 u. darin die Nadel AB.) § 143.

Die Visirstifte AB des Zeughäuschens sollen auf der Knechtsebene genau senkrecht stehn, wenn die beiden Füße VW ihres Querbalkens genau aufsitzen. Man prüfe demnach sämmtliche Stifte wie folgt. Vorausgesetzt, daß die Horizontalwand des Knechts, wenn letztrer zu der schwächern Sorte gehört, wenigstens in der Nähe des Masstabs vollkommen eben ist, so stecke je einen Stift in die zwei durchstochenen Winkelkreuz-Punkte O u. P. Dieser Durchstich muß räumig genug sein; die Stifte dürfen nicht gezwängt stecken, weil sonst leicht ihr Querbalken nicht exact genug zum Aufsitzen kommt. Visirt man nun beide aufeinander, so sind folgende Fälle möglich.

Erster Fall. Beide decken sich genau. So können sie noch beide in gleichem Sinne falsch sein. Man dreht deshalb den einen um 180°. Decken sie sich nun noch, so sind beide richtig. Kreuzen sie sich aber um beispielsweise 1^{mm} bis zum Scheitel, so ist bei jedem an der abgeneigten Seite am Fuße des Querbalkens soviel abzufeilen, daß sich der Nadelkopf um $1/2^{mm}$ nach der Mitte corrigirt. Natürlich ist nach dieser Correction die Prüfung zu wiederholen.

Zweiter Fall. Die Nadeln decken sich nicht. Man drehe die eine um 180°. Bleibt sie danach genau in derselben Abweichung, so ist sie richtig u. nur die andre falsch. Letztre um 180° gedreht, wird dann die entgegengesetzte Abweichung zeigen. Man justirt nun den betreff. Fuß ihres Querbalkens durch Abfeilen, bis sie mit der correcten stimmt. — Für den Fall aber, daß sich von Anfang an beim Umdrehen der einen wie der andern beide incorrect erwiesen, hat man analog dem ersten Fall vorzugehen.

Hat man nur einmal eine Nadel als ganz correct konstatirt, so kann man nun alle andern einfach gegen diese prüfen und mit dieser zur Deckung justiren. Will man nun den Stativ- od. auch den Freihandknecht vollständig damit montiren, so steckt man drei in die betreffenden Löcher (c, d, e) der Horizontal- u. zwei in die (a u. b) der Pendelwand. Halb durchgeschnittene Medicinkorke der kleinsten Sorte, unten an die Nadeln angespießt u. gehörig angedrückt, bewirken das etwa nöthige Festsitzen der Stifte und versehen damit einfach die Funktion kleiner Vorsteckmütterchen.

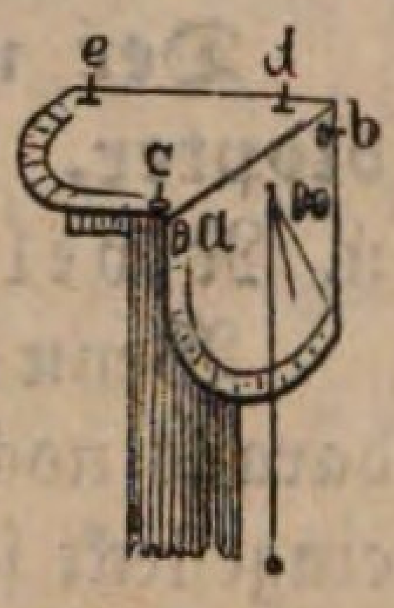


Fig. 78.

Zusatz. Die Prüfung, ob dies Winkelkreuz auf dem Felde stimme, ist das bekannte Abstecken eines Perpendickels und Drehen des Instruments um 90 Grad.

Die beiden Höhenvisur-Verfeinerungs u. Nivellirdiopterchen und deren Behandlung u. Verwendung. § 144.

(Siehe D in Figur 76 auf S. 107 u. Figur 77_2.)

Jedes dieser Dingerchen (D, Fig. 76) ist, wie man sieht, zugleich Okular- u. auch Objektivdiopter. Hauptsache ist, daß die beiden Visirrichtungen genau einander parallel seien. Nun pflegt zwar der Mechanikus dieselben nach einer raffinirten Schablone so anzufertigen, daß man an deren Congruenz kaum zweifeln sollte. Trotzdem aber soll ein ordentlicher praktischer Mathematiker auch dem einfachsten Instrumente nicht ohne Prüfung sich anvertrauen. Letztre geschieht am besten so: Man geht mit 4 Baken u. dem Stativknechte auf ein Feld od. eine Wiese, steckt die beiden Diopter in die Horizontalwand des Knechts, also dort ein, wo in Fig. 78 die Stifte c u. d stecken; stellt den Knecht mit seinem Stabe fest u. horizontal auf, läßt von einem Gehülfen nach einer Seite hin genau in der Visurrichtung der Diopterchen 2 Stäbe aufstellen u. verlängert diese Absteckung mittels der andern beiden Stäbe nach der ent-

gegengesetzten Seite. Die zweite Visirachse jener Diopterchen muß nun auch auf dieser Seite stimmen. Wenn nicht, so ist das betreffende eine Diopterhaar entsprechend zu justiren, indem man dessen Einfädelungslöcher erweitert u. das Haar durch Holzkeilchen genügend auf die Seite drängt. — (Das einfache Verwechseln beider Diopter, nachdem man vorher ihre Visur festgestellt, würde ebenfalls eine genügende und dann selbst von der Stube aus vorzunehmende Controle abgeben, wenn man nicht zu fürchten hat, daß sich der Knecht beim Vertauschen der Diopter etwas verstellen könne. Jedenfalls ist solch einfachere Probe deshalb zu wiederholen.)

Das Einziehen eines Haares, wenn solches hierbei od. sonst wie aus Versehen einmal nöthig werden sollte, kann sich der damit nicht sehr Vertraute wie folgt erleichtern. Man nimmt einen Faden vom dünnsten und dunkelsten, dem Pferdehaar entsprechenden sog. Eisengarn, einem sehr glatten Zwirne; fädelt diesen am untern Loch von außen ein u. macht innen einen Knoten. Dann fädelt man das andre Ende ebenfalls von außen durch das obere Loch, macht innen thunlichst nahe an der Wand einen zweiten Knoten, schneidet den Faden jenseits desselben ab; spitzt ein Schwefelhölzchen zu, zieht den Faden mittels des obern Knoten straff u. keilt ihn durch das Hölzchen fest. Dieses Haar, od. vielmehr dieser Faden, kann uns vermöge seiner beiden Knoten nun nicht wieder entwischen, wenn auch das Keilchen zufällig herausgehen sollte.

Die so geprüften Diopterchen sind lediglich für die Pendelwand zur Verfeinerung der Horizontal- u. Höhen- wie Tiefenvisuren bestimmt; u. zwar mehr für den Stativ- als den Freihandgebrauch, da man bei letzterm den Knecht mit thunlichst gestrecktem Arme, also für solche Diopter dann zu weit vom Auge ab, verwenden soll.

§ 145. **Der mögliche Collimationsfehler der eingesteckten Nivellirdiopter.** Justirung des durch letztre verfeinerten Höhen- u. Nivellirpendels.

Wenn auch beide Diopterchen correct gemacht sind, so folgt nothwendig daraus noch nicht, daß sie auch entsprechend correct in a u. b (Fig. 77₂ u. 78) eingesteckt sein müssen; mit andern Worten: daß, wenn sie vor- od. rückwärts eine Horizontalvisur bilden, das Pendel exact auf Null einspiele. Die dann noch mögliche Abweichung vom Nullpunkte des Höhenkreises heiße, analog der beim Theodoliten, der Collimationsfehler (collimare lat. zusammenfallen). Um diesen kennen zu lernen, muß man das Instrumentchen aufstellen und zu dieser Aufstellung den genauen Horizontalpunkt zu seiner Diopterhöhe sich verschaffen können. Dies geschieht auf folgende Weise.

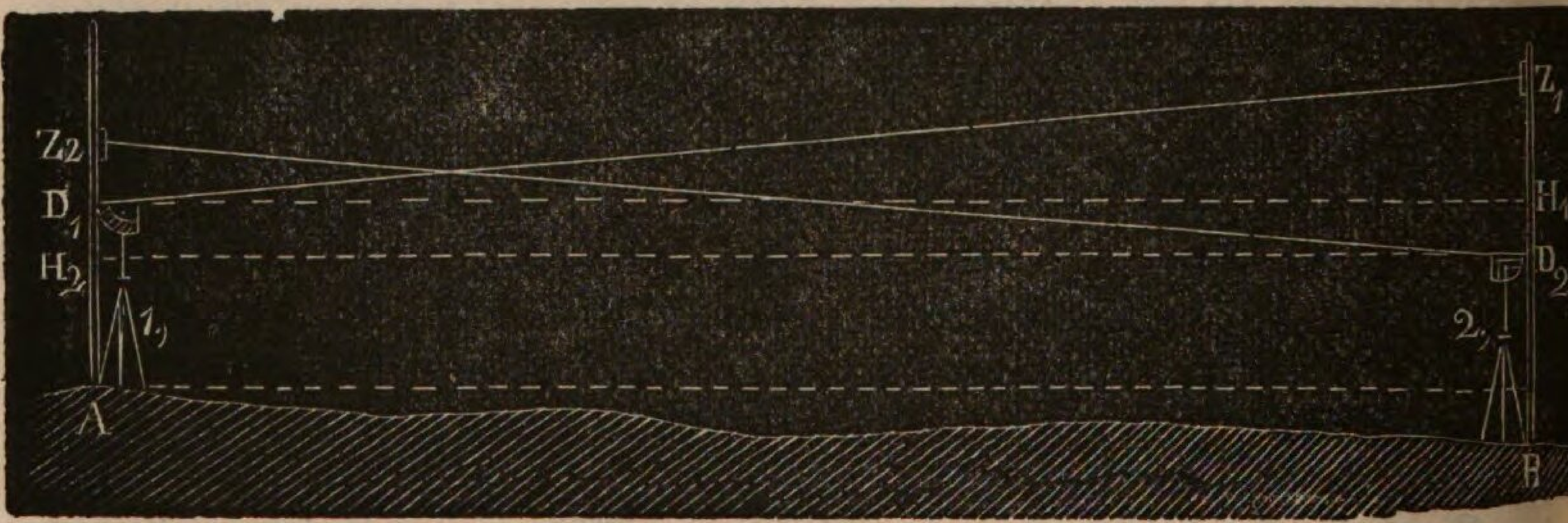


Fig. 79

Auf nahe horizontalem, jedenfalls wenigstens nicht sehr geneigtem Terrain wähle zwei Punkte A u. B in etwa 12—15 Schritt Entfernung von einander. Stelle in A eine auf Millimeter od. auf Hundertelzoll ablesbare, mit Ziel-

scheibe Z versehene Nivellirlatte u. daneben den Stativknecht K so, daß seine Diopterhöhe AD an dieser Latte bis auf's Millimeter abzulesen; diese Diopterhöhe in Station 1 od. A bei auf Null gestelltem Pendel sei $= AD_1 = \mathbf{d}_1$. Schicke nun den Gehülfen mit der Ziellatte nach B und laß von A aus, bei recht akkurat einspielendem Pendel, die Zielscheibe Z einstellen u. die Lattenhöhe BZ_1 ablesen. Wiederhole dies einige Male u. nimm das Mittel; es sei $= \mathbf{l}_1$. Während die Ziellatte zunächst noch in B bleibt, markire deren ersten Punkt A und stelle dich dann mit dem Knechte scharf neben B, so daß dessen Diopterhöhe $BD_2 = \mathbf{d}_2$ an der Latte wiederum bis auf's Millimeter abzumessen; selbstredend bei einspielendem Pendel. Schicke nun den Gehülfen nach A zurück u. bestimme von D_2 aus, bei exact auf Null gestelltem Pendel die zugehörige Lattenhöhe $AZ_2 = l_2$; ebenfalls als Mittel mehrerer Repetitionen. Endlich rechne:

Die Visur steht zu hoch um $\frac{(l_1 + l_2) - (d_1 + d_2)}{2}$; wobei, wenn dieser Werth negativ wird, dies das entgegengesetzte des „zu hoch", also ein „zu tief um ꝛc." andeutet. —

Gesetzt, das Resultat ergab +3 Cent, so wäre nun die Zielscheibe Z_2 um genau 3 Zoll herab u. die Latte wieder in A aufzustellen. Damit ist für den Diopterstand D_2 in B der entspr. Horizontalpunkt H_2 gefunden. Auf diesen richtet man nun die Visur u. bezeichnet den zugehörenden Stand des Pendelfadens neben dem Nullpunkte der Tangenten- wie der Gradskala durch einen deutlichen Stich. Dieser Stich zeigt den Collimationsfehler; jedoch, wohl zu merken, nur für das so eingesteckte Diopterpaar. Um jeder noch so kleinen unnöthigen Fehlerquelle auszuweichen, markire man daher diese Diopter durch ein eingeritztes I u. II od. a u. b, um später jedes wieder in dasselbe Loch zu stecken. — Bei Beobachtung von Höhen- u. Tiefenwinkeln durch diese Diopter wird dann gedachter Collimationsfehler entsprechend in Ab- resp. Aufrechnung gebracht; beim Nivelliren aber das Pendel einfach, anstatt auf die Null, auf den Stich zum Einspielen gebracht.

Zusatz. Der Beweis der obigen Formel „Correction nach unten" $= \frac{(l_1 + l_2) - (d_1 + d_2)}{2}$ ist einfach folgender. Es sei C der Horizontalpunkt zu A, H_1 zu D_1 u. H_2 zu D_2; und ferner Z_1 die Zielscheibe zur Visur aus D_1, u. Z_2 zu der aus D_2, so daß $H_2Z_2 = H_1Z_1 =$ Elevationsfehler f der vermeintlichen Horizontal- od. Nivellirachse. Dann ist

$BC = BD_2 - CD_2$ und auch $= BZ_1 - CZ_1$; was eben so viel als

$$BD_2 - (AZ_2 - H_2Z_2) = BZ_1 - (CH_1 + H_1Z_1)$$

d. i. $d_2 - (l_2 - f) = l_1 - (d_1 + f)$, woraus dann leicht

$$2f = l_1 + l_2 - d_1 - d_2 \text{ od. } f = \frac{(l_1 + l_2) - (d_1 + d_2)}{2}.$$

Weiteres zur Nivellirpraxis mit Pendel u. vorbemerkten Diopter n. — Sind die beiden Diopter richtig u. auch richtig in die Pendelwand eingesteckt oder deren etwaiger Collimationsfehler angestochen (s. vorig. §), so läßt sich deren Visur durchs Pendel bei ruhigem Wetter bis auf's Halbzehntelgrad d. i. bis auf 3 Minuten genau einstellen, wenn man dazu einen hinlänglich feinen u. langen u. etwa mit Doppelloth gespannten Faden wählt. Bei ruhigem Wetter u. etwa 15 Schritt weiten Lattenständen kann dann die mittlere Unsicherheit der Einzelvisur auf 1 Centimeter, die mögliche Schwankung ab u. zu auf's Doppelte gerechnet werden. Schon bei nur 6 bis 8 Sta- § 146.

tionen pflegen sich daher diese Schwankungen so zu begleichen, daß das summarische Resultat dem der bekannten Quecksilberwage durchschnittlich gleich zu zählen. Wo auf ein sichreres Resultat etwas ankommt, repetire man das Nivellement in umgekehrter Richtung. — Im ganzen verfahre man thunlichst nach folgender Regel.

Wenn man nur die Höhendifferenz der beiden Endpunkte des Trakts wissen will, so geht die Sache am flottesten wie folgt. Der Gehülfe stellt sich mit der Ziellatte im Anfangspunkte A auf, u. der Vermesser in etwa 15 Schritt Entfernung mit dem Stativknechte so, daß dieser mit seinen Dioptern schon gleich nach der Latte weist u. das Pendel nahe anspielt. Nun feinere Einstellung des Pendels, dafern nöthig mit sanftem Klopfen, bei etwas bewegter Luft unter momentanem Vorhalten des Rocks; Einwinken der Scheibe u. Ablesenlassen od. besser Selbstablesen der Zielhöhe. — Nun dirigire man, ohne den Knecht zu alteriren, den Gehülfen auf den folgenden oder Anbindepunkt so, daß er just in die Richtung der Diopter zu stehen kommt, worauf nun die Scheibe sofort wieder eingewinkt werden kann. Sobald das geschehen, stellt man sich flink mit dem Knechte 15—20 Schritt vom Gehülfen vorwärts so auf, daß, wenn nun die Anbinde- od. Rückvisur auf letztern gerichtet wird, derselbe später in gleicher Richtung vorwärts in 15—20 Schritt Entfernung wiederum einen passenden Stellpunkt findet. U. s. f. Ob der Meßknechtsherr u. sein Gehülfe auf dies Geschäftchen sich gehörig eingeübt, können dieselben daraus ersehen, daß bei ruhigem Wetter 1. die ganze Arbeit auf jeder Station (Aufstellen, Einrichten, Rückvisur u. Vorvisur) zusammen nicht über zwei Minuten dauern und dabei 2. die mittlere Unsicherheit der Einzelvisur nicht über 1 Centimeter betragen darf. —

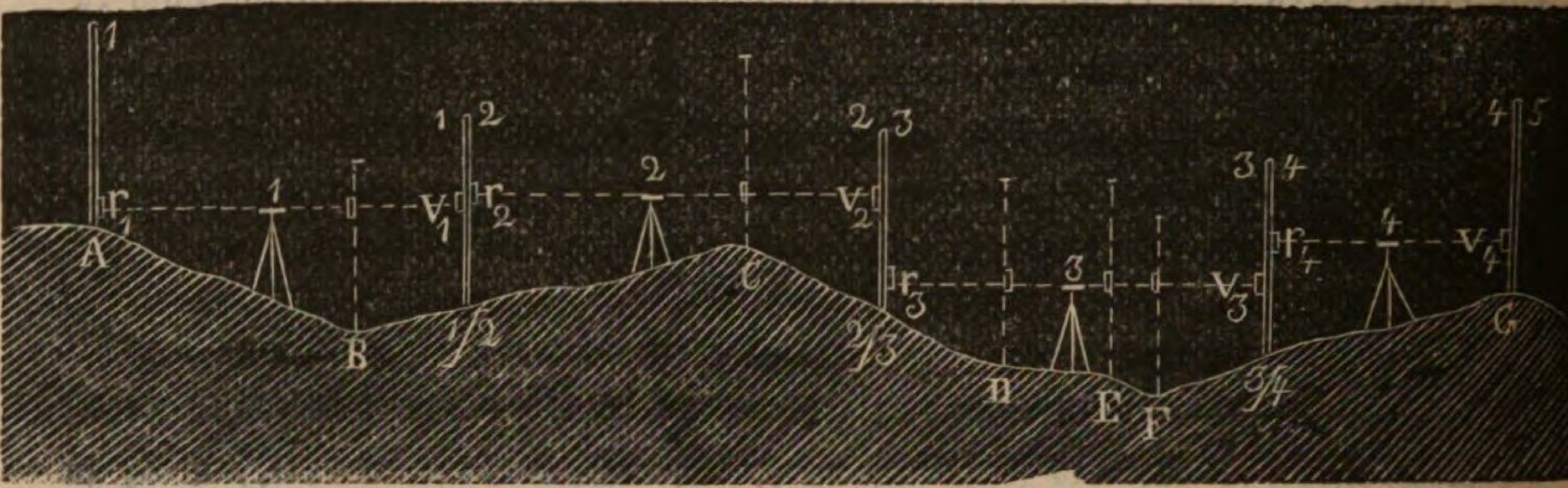


Fig. 80.

Für Anfänger sei dann noch an folgende Regeln erinnert:

1. Gefälle vom ersten Lattenpunkte A bis zum letzten G = $(v_1 + v_2 + v_3 + v_4) - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$ od. in Worten: Summe aller Vorhöhen minus Summe aller Rückhöhen; wobei bedeuten: die Figurpunkte $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_4$ . . . die wie vorbeschriebenen beliebig u. zweckmäßig zu wählenden Anbindepunkte; Rückhöhe: die Zielscheibenhöhe bei der je zweiten Visur dieser Anbindepunkte incl. der des Anfangspunktes A; Vorhöhe: die Zielhöhe jedes neuen Punktes, mag derselbe auch seitwärts od. etwas rückwärts liegen. So z. B. gelten bei Station 3 nur die Visur r_3 als Rück-, die nach D, E, F dagegen alle als Vorvisuren. Derlei Zwischenpunkte u. deren Höhen, wie diese letztern drei, bleiben aber bei obiger Gefällsberechnung zunächst außer Acht; siehe folg. Satz.

2. Und um das Gefäll od. einzelne Höhendifferenzen von dazwischenliegenden Terrainpunkten, wie B, C, D, E, F zu finden: behandle entweder jeden als den letzten Lattenstand nach voriger Regel; oder reducire den Horizont u. damit die Zielhöhen der ersten Station auf den Nullpunkt A; ebenso dann mittels der Differenz zwischen v_1 u. r_2 die der zweiten Station; u. s. f.

3. Negative Resultate bedeuten Steigung.

Messung der Sonnenhöhen u. der Zeit. (Vgl. hierzu die Vorschule auf S. 84 flg. u. die Begründung ihrer Formeln auf S. 90.) § 147.

Ist die Pendelwand nach § 128 geprüft u. deren Normalrichtlinie festgestellt, u. hat man in od. neben letztre einen nach § 143 geprüften Visirstift (zur Noth auch einen ungeprüften; s. folg. Zusatz) vorn bei b gut aufsitzend eingesteckt, so kann man unschwer damit (durch Repetition) die Höhe der Sonne bis auf $^1/_{10}$ Grad und dadurch die Zeit des Beobachtungsmoments im Winterhalbjahr bis auf die Minute, im Sommerhalbjahr sogar bis auf die halbe Minute genau finden, und zwar auch beim Freihandgebrauch, wenn man dabei nach folgender Regel verfährt.

1. Messung der Sonnenhöhe mit dem Freihandknechte.

Halte den, wie vorstehend bemerkt, mit seinem Schattenstifte armirten Knecht so vor's Gesicht u. gegen die Sonne, daß der Stiftsschatten genau parallel zur (Normal-)Richtlinie über die Pendelwand fällt, während gleichzeitig der Stand des Fadens in der Gradskala abzulesen. Jenachdem man es am besten befindet, kann man dabei den Knecht entweder mit nur einer Hand halten, wie nebenstehende Figur zeigt, oder (meist besser) mit beiden Händen. Kann man dabei den linken Ellbogen auf irgend etwas stützen, so wird dadurch die Ruhe u. Sicherheit noch etwas mehr erhöht. Man wiederhole diese Uebung so oft, bis man sich überzeugt hat, daß man größere Differenzen als bis zu $^2/_{10}$ Grad nicht mehr erhält. Am besten macht man diese Uebungen in der hohen Tageszeit (von 10—2 Uhr), weil da die Sonne am trägsten steigt u. fällt. Außerdem hätte man zu beachten, daß bei je 1 Minute späterer Beobachtung die Höhe der Sonne sich in unserm deutschen Winter um ca. $^1/_{10}$ Grad, im Sommer aber fast um's Doppelte ändert (vormittags steigend, nachmittags fallend).



Fig. 81.

Zusatz. Hat man Ursache, seinem Stift nicht ganz zu trauen, so drehe man diesen schnell um 180°, drücke seinen Querbalken fest an u. beobachte Schatten u. Gradmas abermals. Diese Gegenprobe muß aber, Vorigem gemäs, rasch genug geschehen, bedenkend, daß außer im mittlern Tagesdrittel (v. 10—2 Uhr) die Sonnen pro Zeitminute um 1 bis fast 2 Zehntelgrad sich ändert. — Nimmt man sich mehr Zeit und macht z. B. erst zwei Beobachtungen mit der anfänglichen Stiftsstellung, und dann zwei mit der um 180° gedrehten, so gehört das Mittel aus diesen 4 Beobachtungen zur Mitte ihrer Beobachtungszeit. Wonach man letztre selbst mit einem ziemlich unrichtigen Stifte richtig bestimmen kann.

2. Messung der Sonnenhöhe mit dem Stativknecht.

Wer auf dem Lande wohnt und es zu Zwecken seiner Uhrstellungen daran wenden will, kann sich ein kleines auf's Fensterbrett zu stellendes hölzernes Stativchen nach beistehender Figur machen lassen. Der etwa 40^c hohe u. etwa 5^c dicke Stab K ist um den Zapfen y drehbar. Der Knecht wird mit Hülfe des Anschraubstiftes des Zeughäuschens gerade so daran befestigt, wie früher beim hohen Stabe angegeben (s. § 141). Der eine Arm des Dreifußes hat eine Elevationsschraube. Beim Gebrauche muß die Schraube ziemlich gegenüber der Pendelwand stehen: denn durch ihre Hülfe soll das Pendel ja zum Nahe-Anliegen gebracht werden. Das Ganze wird nun so gestellt u. gedreht, daß der Schatten des Stiftes b über die Pendelwand akkurat parallel der Richtlinie fällt und dabei das Pendel fast anspielt. — Zur Noth kann

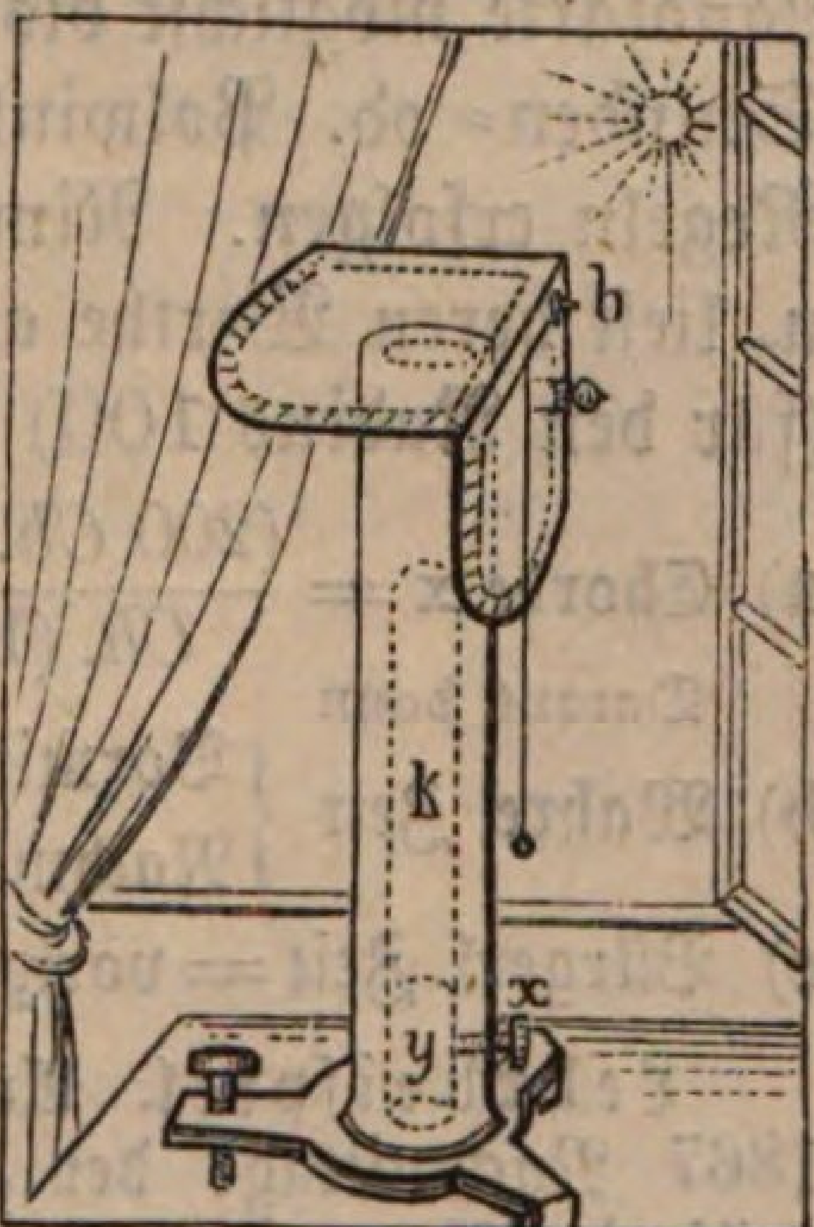


Fig. 82.

man auch eine schlanke Weinflasche oder einen hohen Leuchter nehmen und ein einem Lichte ähnliches Holz einstecken. Statt der Fußschraube zum Heben u. Senken schiebt man dann Papierkeilchen unter die Flasche 2c. 2c.

3. Schließliche Feststellung der Sonnenhöhe u. des gleichzeitigen Standes derjenigen Uhr, die man berichtigen will.

a) Geschieht die Beobachtung mit Stativ, so ist die Sache selbstverständlich. Man notirt den Stand der Sonnenhöhe u. gleichzeitig den der Uhr. Da es bei der nachherigen Anwendung am bequemsten ist, wenn erstere auf ein ganzes od. mindestens ein halbes Grad fällt, so warte man, wenn möglich, dies ab; indem man die Knechtsstellung ein wenig so modificirt, daß der Faden exact auf einen Strich des Theilkreises fällt u. beobachte dann den Moment, in welchem der allmälig sich ändernde Schatten des Stifts genau parallel zur Richtlinie geworden. In gleichem Momente liest man den Uhrenstand ab. Ist die genaue Lothstellung des Schattenstifts nicht hinlänglich erprobt, so repetire man schnell mit um 180° gedrehtem Stift u. nehme bei stattfindender kleiner Differenz das Mittel aus beiden Sonnenhöhen u. Uhrenzeiten.

b) Geschieht die Beobachtung aus freier Hand u. soll sie möglichst sicher sein, so sind mindestens zwei, besser vier Beobachtungen nöthig, die alle zusammen in 1 bis 2 Minuten abgemacht sein können; u. zwar in folgenden Tempo's. Uhrenstand notiren; gleichzeitig erste Sonnenhöhe beobachten u. notiren; dann die zweite; dann den Stift um 180° drehen; dritte Beobachtung u. Notirung; schließlich vierte; u. nun abermalige Ablesung des Uhrenstandes. Zum Mittel der beiden Uhrenstände gehört dann das Mittel der beobachteten Sonnenhöhen.

Zusatz. Die Drehung des Stifts dabei ist natürlich dann nicht nöthig, wenn man sich früher bereits von dessen vollkommner Genauigkeit hinlängl. überzeugt hatte. Siehe obigen Zusatz.

Zum eigentlichen Praktikum der Zeitmessung u. Uhrenstellung mittels des Knechts.

§ 148. Wie S. 84 flg. u. 90 flg. bewiesen, brauchen wir hierzu die Sonnenhöhe H des fragln. Moments, die Sonnendeklination D des betr. Tages und die geogr. Breite B des Beobachtungsorts. Erstre gibt uns der Knecht nach Anweisung des vorigen §; D gibt die hier unten wiederholte astronom. Tafel der math. Brieftasche; u. die Breite B ist, wenn noch nicht bekannt, aus einer guten Landkarte möglichst bis auf's Zehntelgrad zu entnehmen. Die Berechnung des Stunden- od. Polwinkels P kann dann nach jeder der S. 86 aufgestellten Regeln erfolgen. Nimmt man, wie wir empfohlen, die Formel 7^b (S. 91) u. liest deren Werthe aus Meßknechts linker Oberecke ganz in dortiger Ziffer (für den Radius 100) ab, so gilt dann für den Hülfswinkel x (= 180 — P):

$$\text{a) Chorde } x = \frac{(200\ Ch.\ 2\,H \mp Ch.\ 2\,B\ Ch.\ 2\,D)\ 100}{Ch.\ (180-2\,B)\ (100 - Bh.\ 2\,D)} \left\{ \begin{array}{l} -\text{ für's Sommer-} \\ +\text{ für's Winter-} \end{array} \right\} \text{Halbjahr.}$$

Daraus dann

$$\text{b) Wahre Zeit} \left\{ \begin{array}{l} \text{Vormittags} \\ \text{Nachmittags} \end{array} \right\} = 6 \text{ Uhr} \pm 2\,x \text{ Minuten; u. daraus}$$

c) Bürgerl. Zeit = vorige wahre Zeit mit Aenderung der nachfolg. Zeitgleichungstafel.

Lehrbeispiel. An einem Orte unter 53° geogr. Breite (B) zeigte am 10. Juni 1867 Nachmittags der Knecht die Sonnenhöhe von netto 30°, während die zu prüfende Uhr auf 4 Uhr 30 Minuten stand. Inwiefern ist letztre zu berichtigen? — Auflös.: Gegeben B = 53,0°; H = 30,0°; D (lt. nachfolg. Taf.; 10. Juni, 3s. Jahr) = = 23,01°; Zeitgleichung = — 0,9 Min. Also bürgerl. Zeit = 6 Uhr — 2 x Min. — 0,9 Min.; und Chorde x° =

$$= \frac{(200\,Ch.\,60{,}0^{0} - Ch.\,106{,}0^{0}\,.\,Ch.\,46{,}02^{0})\,100}{Ch.\,74^{0}.(100 - Bh.\,46{,}02^{0})} = \frac{(200.100 - 159{,}72.78{,}20)\,100}{120{,}35 \times (100 - 7{,}96)}$$

$= \frac{(20000-12490)\,100}{11077} = \frac{751000}{11077} = 67{,}80$. Diese Chorde in der *Ch.*-Spalte aufgesucht, zeigt auf $x = 39{,}7^{0}$; also auf die Sonnenzeit $= 6$ Uhr $- 39{,}7 \times 2$ Min. $= 4$ Uhr 40,6 Min. oder auf die Mittelzeit 4 Uhr 40,6—0,9′ = 4 Uhr 39,5 Min. Die fragliche Uhr ist sonach um 9,5 Min. vorzustellen.

Vgl. hiermit dasselbe, nach zwei andern Formeln berechnete Beispiel im Kap. II der polytechn. Brieftasche. — Obgleich, wie diese Uebereinstimmung lehrt, die in der 3ten Auflage gedachter Brieftasche enthaltene Tafel der mittleren Deklination u. Zeitgleichung für's gewöhnliche Leben und namentlich im Sommer genau genug arbeitet, wollen wir dieselbe doch jetzt noch durch folgende vollkommnerere ergänzen, die wir der Güte eines gelehrten Meßknechtsfreundes, des Direktors der Leipziger Sternwarte, Herrn Prof. Dr. Bruhn's, verdanken.

Hülfstafel

zur Ablesung der Sonnendeclination u. der Zeitgleichung v. 5 zu 5 Tagen.

(Genau für den Meridian von Berlin, Dresden, Tharand etc.; zu Zeitmessungen bis $^1/_4$ Min. aber auch hinlänglich genau für ganz Deutschland. Für je 36° nach Osten od. Westen nimm den Werth um $^1/_{10}$ Tag eher resp. später).

Datum	Declination der Sonne. Schaltjahr*)	Nachfolgende Jahre 1.	2.	3.	Zeitgleichung nach Zeit-Minut.
	s = südl.; n = nördl.; ° = Grad.				
Jan. 1.	s 23,05°	s 22,99°	s 23,01°	s 23,03°	+ 3,9′
6.	s 22,56	s 22,46	s 22,50	s 22,52	„ 6,1′
11.	s 21,88	s 21,76	s 21,80	s 21,84	„ 8,2′
16.	s 21,02	s 20,88	s 20,93	s 20,97	„ 10,0′
21.	s 20,00	s 19,83	s 19,89	s 19,94	„ 11,6′
26.	s 18,82°	s 18,63°	s 18,69°	s 18,76°	„ 12,8′
Jan. 31.	s 17,50°	s 17,29°	s 17,36°	s 17,43°	+ 13,7′
Febr. 5.	s 16,05	s 15,82	s 15,90	s 15,97	„ 14,3′
10	s 14,49	s 14,24	s 14,32	s 14,40	„ 14,5′
15.	s 12,82	s 12.56	s 12,65	s 12,73	„ 14,4′
20.	s 11,07	s 10,80	s 10,89	s 10,98	„ 14,0′
25.	s 9,25°	s 8,97°	s 9,06°	s 9,15°	„ 13,3′
März 2.	s 6,99°	s 7,08°	s 7,18°	s 7,27°	+ 12,3′
7.	s 5,06	s 5,15	s 5,25	s 5,34	„ 11,2′
12.	s 3,10	s 3,20	s 3,29	s 3,39	„ 9,9′
†) 17.	s 1,12	s 1,22	s 1,32	s 1,42	„ 8,5′
22.	n 0,85	n 0,75	n 0,65	n 0,56	„ 7,0′
27.	n 2,81°	n 2,71°	n 2,62°	n 2,52°	„ 5,4′
April 1.	n 4,75°	n 4,66°	n 4,56°	n 4,47°	+ 3,9′
6.	n 6,66	n 6.56	n 6,47	n 6,38	„ 2,4′
11.	n 8,51	n 8,42	n 8,33	n 8,24	„ 1,0′
16.	n 10,31	n 10,22	n 10,14	n 10,05	— 0,2′
21.	n 12,04	n 11,95	n 11,87	n 11,79	„ 1,4′
26.	n 13,68°	n 13,60°	n 13,52°	n 13,45°	„ 2,3′
Mai 1.	n 15,24°	n 15,16°	n 15.09°	n 15.01°	— 3,0′
6.	n 16,68	n 16,61	n 16,55	n 16,48	„ 3,6′
11.	n 18,01	n 17.95	n 17,89	n 17,83	„ 3,8′
16.	n 19,22	n 19,16	n 19,11	n 19.05	„ 3,9′
21.	n 20,29	n 20,24	n 20,19	n 20.14	„ 3,7′
26.	n 21,22°	n 21,18°	n 21,14°	n 21,09°	„ 3,3′
Mai 31.	n 21,95°	n 21,96°	n 21,93°	n 21,89°	— 2,6′
Juni 5.	n 22,61	n 22,58	n 22,56	n 22,53	„ 1,8′
10.	n 23.06	n 23.04	n 23,02	n 23,01	„ 0,9′
15.	n 23,34	n 23,33	n 23.32	n 23,31	+ 0,1′
20.	n 23,45	n 23,45	n 23,45	n 23,45	„ 1,2′
25.	n 23,39	n 23,40	n 23,41	n 23,41	„ 2,3′
30.	n 23,16°	n 23,17°	d 23,19°	n 23,20°	„ 3,3′

Datum	Declination der Sonne. Schaltjahr*)	Nachfolgende Jahre 1.	2.	3.	Zeitgleichung nach Zeit-Minut.
	s = südl.; n = nördl.; ° = Grad.				
Juli 5.	n 22,66°	n 22,78°	n 22,80°	n 22,83°	+ 4.2′
10.	n 22,19	n 22,22	n 22,25	n 22,28	„ 5,0,
15.	n 21,47	n 21,50	n 21,54	n 21,58	„ 5,6,
20.	n 20.59	n 20.63	n 20,68	n 20,73	„ 6,0′
25.	n 19,56	n 19,62	n 19,67	n 19,72	„ 6,2,
30.	n 18,41°	n 18,47°	n 18,53°	n 18,59°	„ 6,2′
Aug. 4.	n 17,13°	n 17,19°	n 17,26°	n 17,32°	+ 5,9′
9.	n 15,73	n 15,80	n 15,87	n 15,94	„ 5,3′
14.	n 14,23	n 14,30	n 14,38	n 14,45	„ 4,5′
19.	n 12,63	n 12,71	n 12,79	n 12,87	„ 3,4′
24.	n 10,95	n 11,03	n 11,11	n 11,20	„ 2,2′
29.	n 9,19°	n 9,28°	n 9,37°	n 9,45°	„ 0,8′
Sept. 3.	n 7,38°	n 7,47°	n 7,56°	n 7,65°	— 0,8′
8.	n 5,51	n 5.61	n 5,70	n 5,79	„ 2,4′
13.	n 3,61	n 3,70	n 3,80	n 3,89	„ 4.1′
†) 18.	n 1,68	n 1,77	n 1,87	n 1,96	„ 5,9′
23.	s 0,27	s 0,17	s 0,08	s 0,02	„ 7,6′
28.	s 2,22°	s 2,12°	s 2,03°	s 1,93°	„ 9,4′
Oct. 3.	• 4,16°	s 4,06°	s 3,97°	s 3,88°	— 11,0′
8.	s 6,08	s 5.99	s 5,90	s 5,80	„ 12,4′
13.	s 7,97	s 7,88	s 7,79	s 7,70	„ 13,7′
18.	s 9,18	s 9,72	s 9,64	s 9,55	„ 14,8′
23.	s 11,59	s 11,51	s 11,42	s 11,34	„ 15,6′
28.	s 13,30°	s 13,22°	s 13,14°	s 13,06°	„ 16,1′
Nov. 2.	s 14,93°	s 14,85°	s 14,77°	s 14,70°	— 16,3′
7.	s 16,45	s 16,38	s 16,31	s 16,23	„ 16,2′
12.	s 17,85	s 17,79	s 17,72	s 17,66	„ 15,7′
17.	s 19,13	s 19,07	s 19,01	s 18.95	„ 14.9′
22.	s 20,26	s 20,21	s 20,16	s 20,11	„ 13,7′
27.	s 21,24°	s 21,20°	s 21,15°	s 21,11°	„ 12,2′
Dec. 2.	s 22.05°	s 22,02°	s 21,98°	s 21,95°	— 10,4′
7.	s 22.68	s 22,66	s 22,63	s 22.61	„ 8,3′
12.	s 23,13	s 23,12	s 23,10	s 23,08	„ 6,1′
17.	s 23,39	s 23.38	s 23,37	s 23,37	„ 3,6′
22.	s 23,45	s 23.45	s 23,45	s 23,46	„ 1,1′
27.	s 23,31	s 23,33	s 23,34	s 23.35	+ 1,3′
Jan. 1.	s 23,05°	s 22,99°	s 23,01°	s 23,03°	„ 3,9′

*) Im Januar u. Februar eines Schaltjahres nimm den vorausgehenden Tag.

†) Wo n u. s zusammenstossen, findet sich die Declinationsänderung pro Zwischentag = (n + s) : 5. Z. B. Die Declination für den 20. März eines Schaltjahres? — Da die Aenderung pro Tag = (1,12 + 0,85) : 5 = 0,394, also für 3 Tage = 1,18, so folgt für den (17 + 3)ten März die Declination = südl. 1,12 — 1,18 = — s . 0,06 = nördl. 0,06.

Kap. 12. Der Ingenieur-Meßknecht mit seiner großen Armatur:

d. h. mit Dreibeinstativ u. Visirlineal, incl. kleinem Zeughäuschen; eventuell auch mit Orientirbussole.

§ 149. **Das eigentliche Meßknechtsstativ.** (Einrichtung im Allgemeinen.)

Wer den Wunsch hat, seinen Ingenieur-Meßknecht — behufs Ausführung aller der in den beiden vorigen Kapiteln 10 u. 11 behandelten u. andrer ähnlicher Vermessungsaufgaben, u. zwar 1. nicht blos auf weichem sondern auch auf steinigem od. sonst wie hartem Terrain, u. 2. mit etwas kultivirterer Einrichtung zur Horizontal- wie Vertikal-Stellung u. Drehung — zu einem noch etwas vollkommenern g e o d ä t i s c h e n Aschenbrödelchen emporzuheben: der bedarf dann allerdings statt des einfachen Stab- ein ordentlicheres Dreibeinstativ, zugleich mit Einrichtung zur Universalbewegung. Daß der Knecht hierbei wie bei allen seinen Anwendungen als Stativinstrumentchen, wenn auch nicht unbedingt nöthig so doch am besten, in stärkster Form (im Buchhandel ꝛc. unter dem Namen „Doppelknecht") zu nehmen, ward schon früher bemerkt. Verf. hat für vorgedachte Zwecke den nebenstehend veranschaulichten Stock konstruirt und, soweit an ihm war, neuerdings dafür zu sorgen sich bestrebt, daß derselbe von den angeführten Bezugsquellen in vorschriftsmäßig exacterer Weise geliefert werde, als bisher es manchmal der Fall gewesen zu sein scheint. — Aus drei Beinen bestehend, welche durch drei Schrauben u. Mütterchen x und durch zwei Spannringe zusammengehalten, bis zum Griff C 1 bis 1 1/4 Meter hoch u. in der Mitte ca. 4 Cent. dick, bildet derselbe ein Mittelding zwischen einem kräftigen Spazier- u. einem Bergstock; dessen drei Beine zugleich einen dreikantigen hölzernen Hals D mit einem doppeldrehbaren messing. Köpfchen UVS einschließen. Je höher die Beine, desto unbequemer freilich als Gehstock; desto standfester aber, weil der Hals D um so viel kürzer sein kann. Der Griff ist hohl und abzuschrauben, u. mit einem aufgeschraubt. Deckel C versehen. Er ist gerade so kräftig u. seine Hohlung so geräumig gehalten, daß er das ganze kleine Zeughäuschen, soweit man es im Freien zu diesem Stative etwa braucht, in sich aufzunehmen vermag; nämlich: Klammer, Reservelothe, die Doppeldiopter u. 4 bis 6 Visirstifte nebst zubehörigen kleinen Vorsteck-Korken (Korkmütterchen). Wer solchergestalt den Griff als Magazin für diese kleinen Armirungsstücke benutzen will, hat dann zwischen u. auf dieselben noch etwas Baumwolle zu stopfen; wenigstens dann, wenn man die zartern Nivellirdiopter mit hineinsteckt.

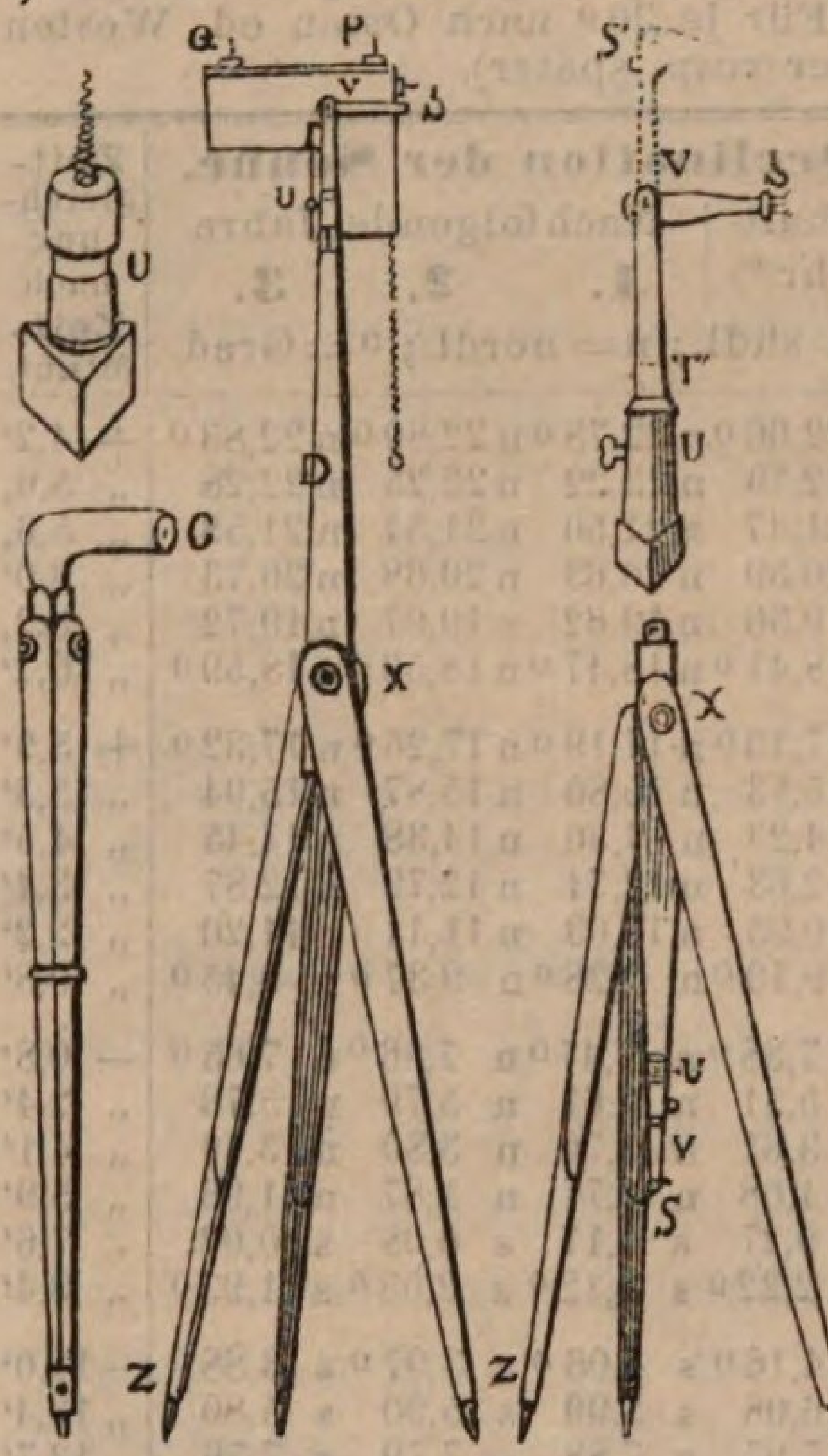


Fig. 83.

Und wer dann nicht gerade solche Aufnahmen nach der Meßtisch- u. Theodoliten-Manier, dazu er das Diopterlineal (S. 118) gebraucht, sondern allerlei andre Messungs- u. Absteckungsarbeiten mit ihm ausführen will, etwa in seiner Eigenschaft als Winkelkreuz u. Diopterloth ꝛc. (Höhenkreis, Baum- u. Bergmesser; Sonnenuhr u. Nivellir-Lothwage): der braucht demgemäs **nur**, mit solchem S t o c k e in der H a n d und s e i n e m M e ß k n e c h t e in der

Brieftasche, in Feld u. Wald zu gehn, um in dieser Beziehung sein Horaz'sches „Omnia mea mecum porto" mit bestem Recht behaupten zu können.

Der auf dem Halse U befindliche metallne Stativkopf besteht aus dem festsitzenden Zapfen U, um den sich der gespaltene Schenkel VT mittels Hülse U u. Flügelschraube drehen u. feststellen läßt, während der in gedachtem Schenkel drehbare, mit Flügelschraube V festzustellende Arm VS bei S in einen mit Scheibchen, Gewinde u. Mütterchen versehenen Stift ausläuft, an den der Knecht, ganz ähnlich wie am Anschraubstift S des kleinen Zeughäuschens S. 107, anzuschrauben ist.

Zur Prüfung des Stativs: Wenn der betreffende Fabrikant seine Schuldigkeit gethan, müssen alle Schrauben nicht nur willig genug gehen, sondern auch scharf u. fest genug greifen. Ganz besonders ist dies beim Mutterchen S von Wichtigkeit. Auch muß die Scheere, in welcher der Arm VS geht, elastisch genug sein, um mittels der Schraube V eine sanft modificirbare Pressung zu ermöglichen. Behufs der Prüfung alles Dessen, stelle man das Stativ mit angeschraubtem Knechte auf und probire sämmtliche dabei vorkommenden od. nöthigen Bewegungen u. Befestigungen.

Das Weitere ergibt sich aus folgender Anweisung.

Das eigentliche Meßknechtsstativ. (Fortsetzung: Manipulation rc.) § 150.

Bei Aufstellung, Montirung u. Gebrauch des vorbeschriebenen Stativstocks verfahre man genau nach folgender Anweisung, deren scheinbare Petanderie man bei der Praxis gerechtfertigt finden wird.

1. Schraube den Griff los u. die drei Beinschrauben locker u. ziehe die Spannringe ab. Stürze dann den Stock, breite die Beine aus u. ziehe deren Schrauben wieder, aber vorerst nicht ganz fest sondern nur sanft an.

2. Stelle den Stativkopf so, daß sein Hals D u. Schenkel T möglichst vertikal u. sein Arm VS horizontal u. rechts stehe, u. dabei dessen Preßschraube V vorn, d. i. nach dem Vermesser zu; weil so diesem am besten zur Hand.

3. Soll dabei der Meßknecht mit irgend etwas armirt werden, z. B. mit Stiften od. Diopten oder (bei Gebrauch des Visirlineals) mit dem Centrumskegel des Horizontalkreises, so geschehe dies jetzt; soweit nöthig unter Mitanwendung der im Stockgriffe befindlichen kleinen Korkstückchen behufs Festziehens u. Festhaltens der eingesteckten Stifte. Schraube dann das Mutterchen S des Armes los u. zwar (weil dasselbe dabei leicht aus den Fingern fällt) mit untergehaltener Mütze rc.; u. spieße den Knecht mittels des einen der beiden in der Pendelwand befindlichen Drehlöcher*) an den Dorn S u. presse ihn angemessen fest; wobei stets zu rathen, demselben hinten u. vorn ein Hartfilzscheibchen unterzulegen, um 1. die Reibung zu mehren u. zugleich zu egalisiren u. 2. die Striche u. Ziffern der betreff. Tafelstelle mehr zu schützen. Schließlich wird dann die rechte Oberecke unter die linke geschoben, u. die so formirte Würfelecke durch die Stahldrahtklammer des Zeughäuschens oder durch das erste beste zweckmäsig gespaltene u. klammerartig ausgehohlte Zweigstückchen festgehalten.

---

*) Die seit 1869 ausgegebenen „Doppelknechte" sind nämlich in der Pendelwand mit zwei Durchlochungen versehen. In die obere spießt u. schraubt man den Knecht, wenn man ihn nicht mit Diopterlineal d. i. nicht als Horizontalkreis- u. Wasserwagen-Niwo verwenden will; dagegen, sobald letztres der Fall, hat man, da sonst das Lineal dem Ganzen leicht eine etwas störend einseitige Drehungstendenz verleiht, die untre Durchlochung vorzuziehen; es sei denn, daß man zugleich auch Elevationen zu beobachten hätte, wobei der Pendelfaden ins Bereich der Preßmutter fiele.

4. Zur Stellung. So montirt, gestattet nun dies Stativ bequem u. fein genug alle drei Bewegungen, die zur Horizontal- u. Vertikalstellung nöthig sind. Zur Horizontaldrehung löst man die unterste od. „Zapfenschraube U“ u. stellt dieselbe nach bewirkter Drehung fest. Zur Horizontalstellung löst man zunächst die obere od. „Armschraube V“ u. stellt diese, indem man mit der Linken diese Schraube u. mit der Rechten den ganzen Knecht anfaßt u. bewegt. Dann erst lüfte man die „Knechtsschraube“ S ein wenig u. gebe der Tafel durch sanftes Drücken od. Klopfen die letzte Stellung.

5. Horizontalstellung ohne Wasserwage. Man sorge, daß die beiden Lappen der Tafel, wenn übereinandergelegt u. festgeklammert, mit ihren Schnittkanten scharf aneinander liegen u. gebe dann nach vorstehend Nr. 4 dem Knecht eine solche Stellung, daß das Pendel auf den Null- od. den Collimationspunkt (S. 97 u. 110) einspielt u. dabei zugleich ganz nahe an der Wand, aber doch noch frei anliegt. (Selbstverständlich ist solche Horizontalstellung immer nur als eine annähernde zu betrachten.)

6. Horizontalstellung mit Dosenlibelle: Nach Satz 4 selbstverständlich!

7. Horizontalstellung mit Röhrenlibelle (in der Regel etwas umständlicher aber genauer als mit der Dosenlibelle): s. § 152.

8. Bei starkem Winde das Stativ breiter od. niedriger aufstellen, weil sonst leicht umgeworfen!

§ 151. **Das Meßknechts-Visirlineal.** Einrichtung im Allgemeinen.

Wer endlich seinen Knecht auf das Höchste cultiviren d. h. so armiren will, daß er auch Wasserwagen-Nivellements u. Aufnahmen in der Meßtisch- oder in der Theodoliten- und wohl auch sogar in der Bussolen-Manier auszuführen gestattet: dem haben wir das nebenstehend unter 2 angedeutete Visirlineal zu empfehlen, wegen dessen akkurater Herstellung zu einem dem Wesen des Ganzen entsprechenden und nur durch die zahlreichere Fabrikation zu ermöglichen gewesenen äußerst populären Preise Verf. mit renommirten Werkstätten in erfolgreiche Verhandlungen zu treten sich veranlaßt sah.*) Wir beschränken uns deshalb hier auf folgende kurze Karakteristik desselben. Siehe hierzu gleichzeitig auch Fig. 86.

(Siehe hierzu auch Fig. 86 auf S. 122.)

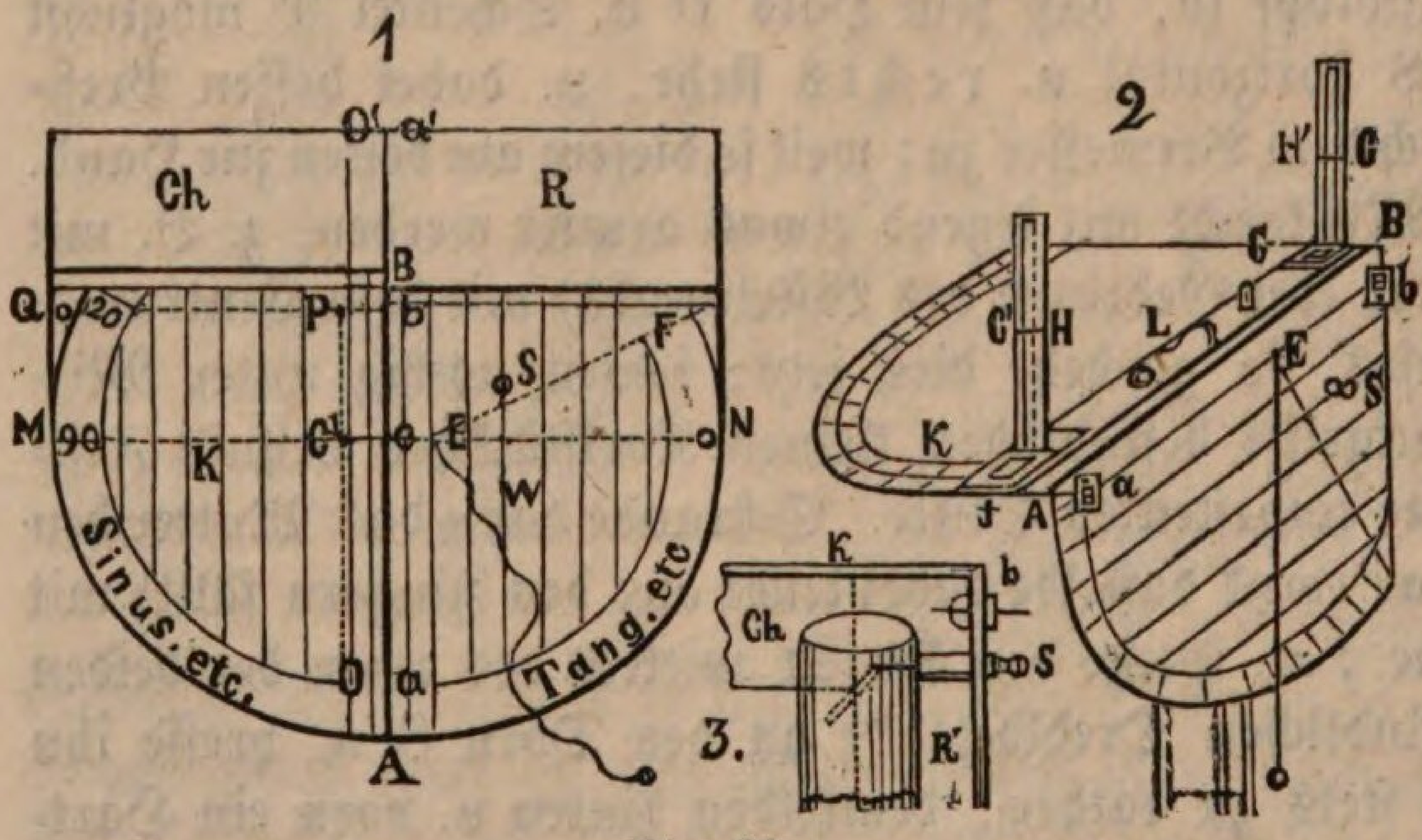


Fig. 84.

*) Siehe deren Adressen in der angeschlossenen Bezugsquellen-Preisnotiz. Immerhin müssen wir aber wiederholen, daß der Schwerpunkt des Meßknechts in seiner Eigenschaft als geodätisches Aschenbrödel durchaus nicht in diesem Kap. 12 beruht. Wir verwahren uns daher gegen den etwaigen Vorwurf des „zu knauplig u. zitterig, u. darum unpraktisch“, den irgend Jemand, besonders bei Benutzung von nicht hinlänglich kräftigen Meßknechten u. Schrauben, zu erheben sich anfangs leicht veranlaßt sehen könnte. **Für die Schulübungen** dürfte indeß eine etwaige Nothwendigkeit zarterer u. mitunter selbst auch in der That „knaupliger“ Manipulirung öftrer vielleicht mehr als ein pädagogischer Vorzug denn als ein drgl. Fehler des fragln. Apparats erkannt werden. Siehe § 153.

Das Lineal — 150^{mm} lang, 15^{mm} breit, 2^{mm} dick — bei C Fig. 86 mit Drehloch, bei J mit einem Index versehen, trägt an jedem Ende einen Visirschenkel G u. G^1 v. 70 bis 80^{mm} Höhe. Jeder derselben hat ein Fenster mit Vertikalfaden u. parallel dazu eine entsprechend enge Visirspalte. In halber Höh, also bei G od. G^1, ist letztre unterbrochen u. geschlossen, um daselbst einem einzelnen Visirloch Platz zu machen, neben welchem ein Horizontalfaden H u. H^1 erstgedachtes Fenster kreuzt. Dadurch ist das Ganze zugleich Vertikal- u. Horizontal- u. zugleich Vor- u. Rückwärtsdiopter. Das Index-Ende J u. dessen Diopter H möge kurzweg das erste heißen, u. somit das dem (jedem Etui in 2 Exemplaren beigegebenem) Centrumsstifte C nähere Ende B das zweite. Zwischen C u. erstem Diopter besitzt das Lineal eine mit ihm befestigte Röhrenlibelle L und dazu eine Elevationsschraube E; diese lediglich zur Nivellirpraxis: um damit das entsprechende Lineal-Ende nöthigenfalls noch ein ganz klein wenig heben zu können, wenn die Bewegung um die Knechtsschraube S Fig. 84 sich einmal zur feinern Einstellung nicht sanft genug erweisen sollte. (S. unten: Zum Nivelliren.) Neben dem Index J und mit ihm korrespondirend kann mittels dreier angebrachter Löcher ein über J hinausragender federnder Abstecher R Fig. 86 angeschraubt werden, welcher ebenfalls jedem Etui beigeschlossen ist u. zum schnellsten unmittelbarsten Auftragen von Winkeln dienen soll; u. zwar dann unter Mitbenutzung des kürzern Centrumsstiftes und am besten dann mit schwachem Knechte u. mittels der Rose (s. S. 99 flg.). Beim Winkelmessen im Freien haben Abstecher u. Elevationsschraube nichts mit dem Lineale zu thun u. somit im Etui zu verbleiben! — Die Elevationsschraube verbinde man (wegen möglicher Ungenauigkeit) mit dem Lineale nur, wenn man damit nivelliren will. Man vergesse also nicht, beim gewöhnlichen Horizontalwinkelmessen oder sogenanntem Aufnehmen die Theile E u. R Fig. 86 abzunehmen. Letztrer namentlich würde beim Visiren u. Ablesen sehr stören.

1. Zusatz. Dem sachverständfgen Ingenieur werden angesichts dieser Beschreibung u. des damit ziemlich schwer in Einklang zu bringenden Fabrikpreises des Instrumentchens wohl mehrfach Bedenken über dessen hinreichend genaue Arbeits- u. Justirfähigkeit beikommen. Indeß, wenn es von einem zuverlässigen Mechanikus zu Dutzenden mittels eines ganz exact arbeitenden Schablonen-Apparats fabricirt wird, so kann im Sinne jenes Genauigkeitsgrades, der bei seinen pädagogischen wie wirthschaftlichen Anwendungen im Ganzen ja doch nur bezweckt werden kann u. soll, ein merklicher u. dann also auch unzulässiger Fehler mehr nur blos in Folge einer Zufälligkeit u. dgl. vorkommen; u. dürften die im Anhange zu diesem Kapitel angedeuteten Prüfungen 2c. wohl ausreichen, eine derartige Fehlerhaftigkeit zu entdecken und zu pariren.

2. Zusatz. Eine noch weitere Vervollständigung durch Bussole, ist für manche, namentlich forstmathematische Lehrer u. Praktiker, allerdings nicht ganz von der Hand zu weisen; sei es zu Zwecken der Instruktion u. Uebung oder im Intresse eines dann beinah doppelt so schnellen Arbeitens. Insofern aber dabei der Preis des Instrumentchens sich so bedeutend erhöht, daß es fraglich wird, ob es nicht dabei, gegenüber seiner Grund- od. Vorbedingung d. i. gegenüber dem Meßknechte, außer Gleichgewicht kommt: so vermögen wir diese Vervollständigung nur bedingungsweise zu empfehlen. Für Diejenigen, die solche wünschen, folgt unter § 154 eine Anweisung, wonach sie sich dieselben nachträglich noch leicht von jedwedem Mechanikus ihrem vorbeschriebenen Visirlineale hinzufügen lassen können.

Meßknechts-Visirlineal (Fortsetzung): Manipulationen beim Horizontalstellen u. Nivelliren. § 152.

Wir nehmen das Instrumentchen vor der Hand (vgl. Anhang zu Kap. 12) als geprüft u. richtig an und lösen damit folgende Aufgaben:

1. Den Knecht montirt zu stationiren u. horizontal zu stellen! (S. Fig. 84_2 auf S. 118.) Auf hartem Boden mittels des dreibeinigen Stativs (S. 116); auf weichem fast eben so bequem mittels einfachem Kettenstabs u. oben angeschraubtem Stift R aus dem Zeughäuschen (S. 107). Nimmt man zu derlei Arbeiten, wie man i. d. R. soll, einen mit zwei Anspießlöchern auf der Pendelwand versehenen Doppelknecht, so schraube man denselben in das untre dem Centrum nähere Loch (falls nicht die in der Anmerkung S. 117 angegebene Rücksicht auf Höhenmessungen das obere Loch

indicirt) u. versäume nicht, dabei vorn u. hinten genügend große u. steife Friktionsscheibchen von Filz unterzulegen. Der Centrumsstift C ist einzustecken noch bevor man die Würfelecke formirt. (Beim spätern Wiederherausziehen dieses Stifts drehe man denselben gleichzeitig rechts, nicht links; da man dann die Spitze abschrauben würde.) — Nachdem die Würfelecke mittels Draht- oder schnell improvisirten Holzklämmerchens festgebildet u. alle Schrauben entsprechend angezogen, verfahre man möglichst buchstäblich nach folgender Regel: Stelle deinen Knecht u. daneben dich so, daß der Kreis im Blatte des Haupt- od. seines Nebenwinkels (vgl. in folgender Figur die Stellungen A u. C) oder aber, was meist noch bequemer, im Scheitelwinkel derselben, also auf der Seite des Visirers sich befindet u. dabei die Pendelwand zur Rechten u. so, daß der Centrumsstift C genau lothrecht über dem Stationspunkte. Stelle das Lineal auf ca. 90° und bringe die Blase zum Einspielen. Beim einfachen Stativstock geschieht dies durch einfaches Seitwärtsdrücken des Stocks im weichen Boden. Beim Dreibein dagegen lüfte man die Armschraube V mit der linken Hand, fasse gleichzeitig mit der rechten das Mutterchen S der Pendelwand u. stelle so mit beiden Händen gleichzeitig ein u. fest. Sodann stelle das Lineal auf Null; lüfte ein ganz weniges das Schräubchen S der Pendelwand, gib durch Drehung um dasselbe dem Knecht die anderweite Horizontalstellung u. presse ihn so gehörig fest. — Wenn während dessen die Libelle wieder ein wenig sich verzieht: dann, vor weiterm Festpressen, sanftes Klopfen auf den Knecht. — Hierauf flotte Repetition, beziehendlich mit Nachbesserung.

2. Zum Nivelliren einzustellen! — Regel: Nachdem die (für gewöhnlich nicht am Lineale zu belassende!) Elevationsschraube in's Lineal gebracht worden, stelle den Knecht mit seiner Visirkante AB (Fig. 84) nach der Latte u. dann horizontal, wie eben gelehrt. Richte nun das Lineal so, daß, durch die Visirspalte des Diopters gesehen, die Ziellatte im Fenster des andern erscheint. Die noch nicht ganz einspielende Libelle bringe nun, in der Regel am besten durch sanftes Drücken od. Klopfen auf den Knecht, zum genauen Einspielen u. visire nun die Scheibe ein. — Wenn das Klopfen ꝛc. nicht ausreicht, so bewirke zunächst, daß die Blase ein klein wenig nach dem von der Elevationsschraube entferntern Ende hinsteht u. corrigire dann dieselbe durch die Elevationsschraube des Lineals. — Beim Visiren nach andern Punkten derselben Station: selbstverständlich analog! — Weitere Fingerzeige für die Nivellirpraxis s. vorn S. 112.

§ 153. **Meßknechts-Visirlineal** (Fortsetzung): Manipulationen beim Messen der Horizontalwinkel. (Wegen Auftragung derselben s. S. 91.)

1. Horizontalwinkel unter 110° zu messen u. zu repetiren. Z. B. den Winkel A in Fig. 85! (selbstverständlich mittels eines Knechts, der nach Seite 97 centrirt und durchstochen ist).. Stationire das Stativ so, daß der Theilkreis ins Winkelblatt u. das Loth des Centrum C nahe genug auf den Stationspunkt A fällt; oder — für

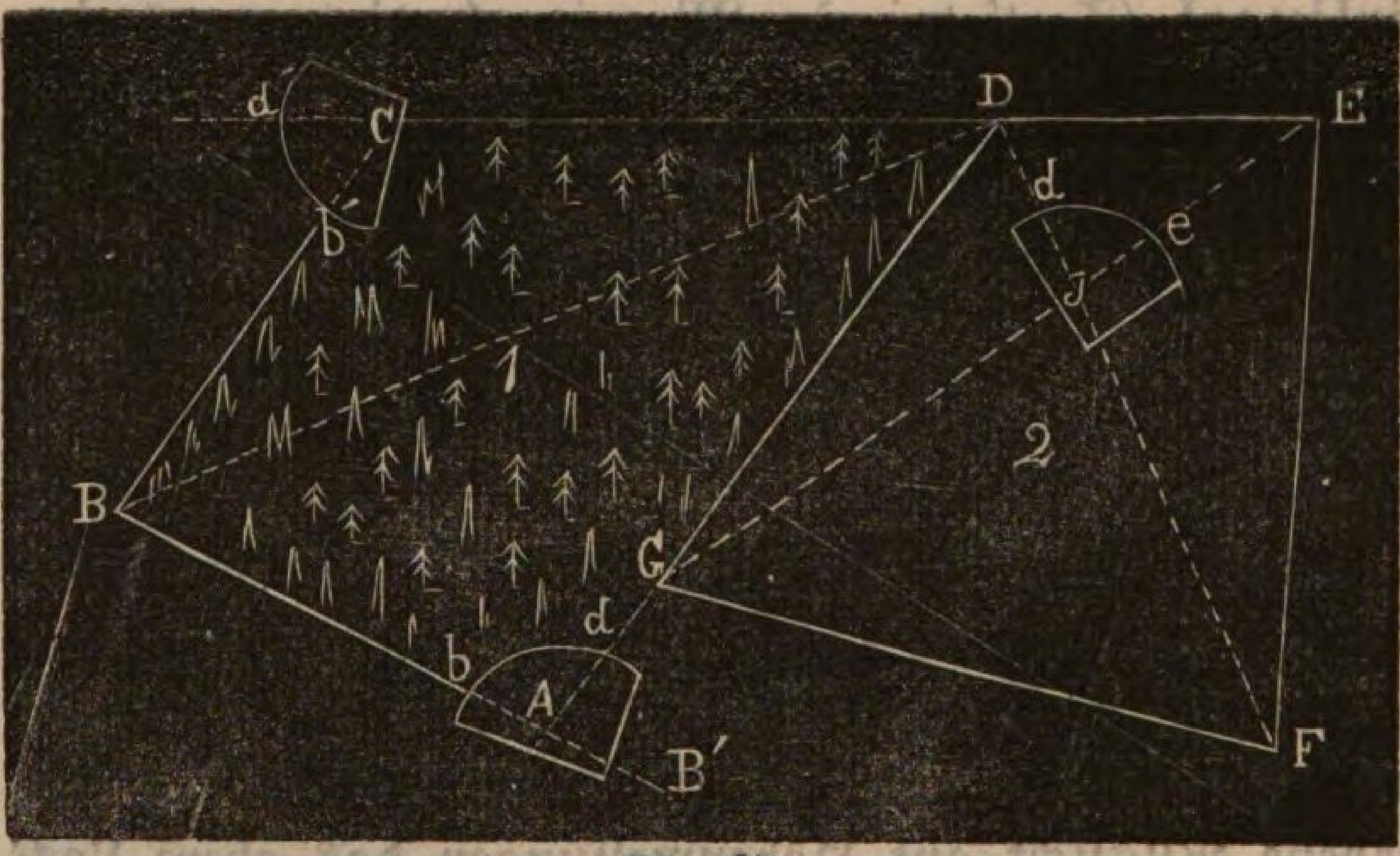


Fig. 85.

das Ablesen etwas bequemer — entgegengesetzt so, daß der Theilkreis in den Scheitelwinkel d. i. auf die Seite des Beobachters fällt. Stelle dann die Tafel horizontal und visire nach dem einen u. andern Objecte, wobei der jedesmalige Inderstand mittels des jedem Knechte beigegebenen Vergrößerungsglases bis auf's Zehntel- unter Umständen auch Halbzehntel-Grad genau abzulesen ist. Und ziehe beide Ablesungen von einander ab. — Repetition: Gib dem Knechte eine kleine Horizontaldrehung; berichtige soweit nöthig die dabei etwa alterirte Horizontalstellung u. verfahre dann wie vorher. Wenn man die Sache richtig los hat, darf eine 5fache Beobachtung nicht viel über 5 Minuten dauern. — Zum flotten Arbeiten ist nöthig, daß man sich in die anfangs etwas schwierig scheinenden, nichtsdestoweniger aber sehr bald zu erlernenden, zarteren Bewegungen des Lineals gehörig einübe. Ganz kleine Correctionen der Visur bewirkt man meist am besten dadurch, daß man mit dem Bleistift od. dgl. sanft an's Lineal od. an die Visirschenkel klopft. — Zur bequemern Ablesung empfiehlt es sich, wie schon bemerkt, den Theilkreis nicht in's Blatt des zu messenden sondern entgegengesetzt in das seines Scheitelwinkels zu bringen. Man hat dann nämlich den Inder gleich unter dem Auge. Z. B. es gälte, von J aus (Fig. 85) durch Visuren nach den Stäben G u. F den Winkel GJF zu messen. So wie hier in Fig. 85 angegeben, steht also der Knecht nicht im eigentlichen Winkelblatt; der Theilkreis aber auf Seite des Beobachters, der dann mit dem erstern oder Inderdiopter visirt. Das Verfahren des Ablesens u. Abziehens ist dabei ganz wie früher. — Zur exacten Ablesung gehört, daß der Inder des Lineals auf dem Theilkreise des Knechts gut anliege. Um dessen, auch wenn letztrer ein wenig conver geworden, immer sicher zu sein, biege man den Inder ein für alle mal ein wenig nach unten. Das Messing gestattet u. das Lineal verträgt das, ohne deshalb unrichtig zu werden.

2. Horizontalwinkel über 110° oder überhaupt stumpfe und überstumpfe Winkel jeder Größe zu beobachten ꝛc. — Z. B. den Winkel C der Fig. 85: Stationire u. behandle den Knecht ganz wie vorher, nur mit dem Unterschiede, daß sein Theilkreis in das Blatt des Nebenwinkels zu stehen kommt. Die eine Visur, wie CB, macht man nun mit der einen Visirspalte (hier mit der zweiten; § 151) u. die andere, wie CD, mit der andern (hier mit der der Inderseite). — Repetitionen u. sonstige Manipulationen: ganz dem Vorigen analog! — Die Differenz beider Ablesungen gibt den Nebenwinkel. Will man gleich den eigentlichen stumpfen Winkel haben, so mehre man die kleinere Ablesung um 180° und mindere sie um die größere. —

NB. Beim nachmaligen Ausziehen des Centralstifts: rechts umdrehen! s. § 152

3. Auftragen der gemessenen Winkel mittels des Visirlineals. — Reduzire (durch leichte elementare Rechnung) die Richtung aller Visirlinien od. Winkelschenkel auf Abweichungen gegen eine bestimmte Abscissenachse d. i. beziffere sie als sog. Azimuthe; stationire u. orientire dann den (hierzu am besten schwächsten) Knecht im Durchschnittspunkte der Coordinatenachsen lt. S. 99; befestige ihn am Rande durch 2 Copirzwecken u. im Kreismittel durch den kürzern Centrumsstift; schraube hierauf an den Inderrahmen des Lineals den federnden Abstecher, setze letztres auf den Knecht und stelle den Inder nach u. nach auf alle berechneten Azimuthe, die dann selbstverständlich abgestochen, beziffert und schließlich parallel abgeschoben werden.

Zusatz zu 1 u. 2. Wenn es gilt, die Horizontalprojektion solcher Winkel zu beobachten, deren Schenkel eine erheblichere Elevation od. Depression besitzen, so

kommt alles darauf an, daß der Knecht, besonders in der Querrichtung der beiden Visuren, möglichst genau horizontal gestellt werde, da sonst die Visirebene keine vertikale sein könnte, was in vorgedachten Fällen von erhöhtem Nachtheile.

§ 154. **Meßknechts-Visirlineal mit Bussole.** Aufnehmen mit Springständen u. andre verwandte Erleichterungen, namentlich **für's forstliche Ingenieurwesen.**

Vorbemerkung über Verf.'s Stellung gegenüber dieser Complikation.

Auf Grund des in der Randbemerkung auf S. 118 angedeuteten Standpunktes konnten nur wiederholte Aufforderungen, namentlich von Seiten forstlicher Techniker: — „eine Construction anzugeben, nach welcher sie ihr Meßknechts-Diopter möglichst bequem u. billig mit einer Bussole und dadurch alle Vortheile der letztern mit denen des Ingenieurmeßknechts zu verbinden im Stande seien" — den Verf. zu den Entschluß bringen, dies Problem in die Hand zu nehmen u. denjenigen Meßknechtsfreunden, welche in einem solchergestalt vertheuerten Visirapparatchen keine Inkonsequenz sehen, die in folgender Figur veranschaulichte u. hinlänglich erprobte Einrichtung mit folgenden Bemerkungen zu empfehlen.

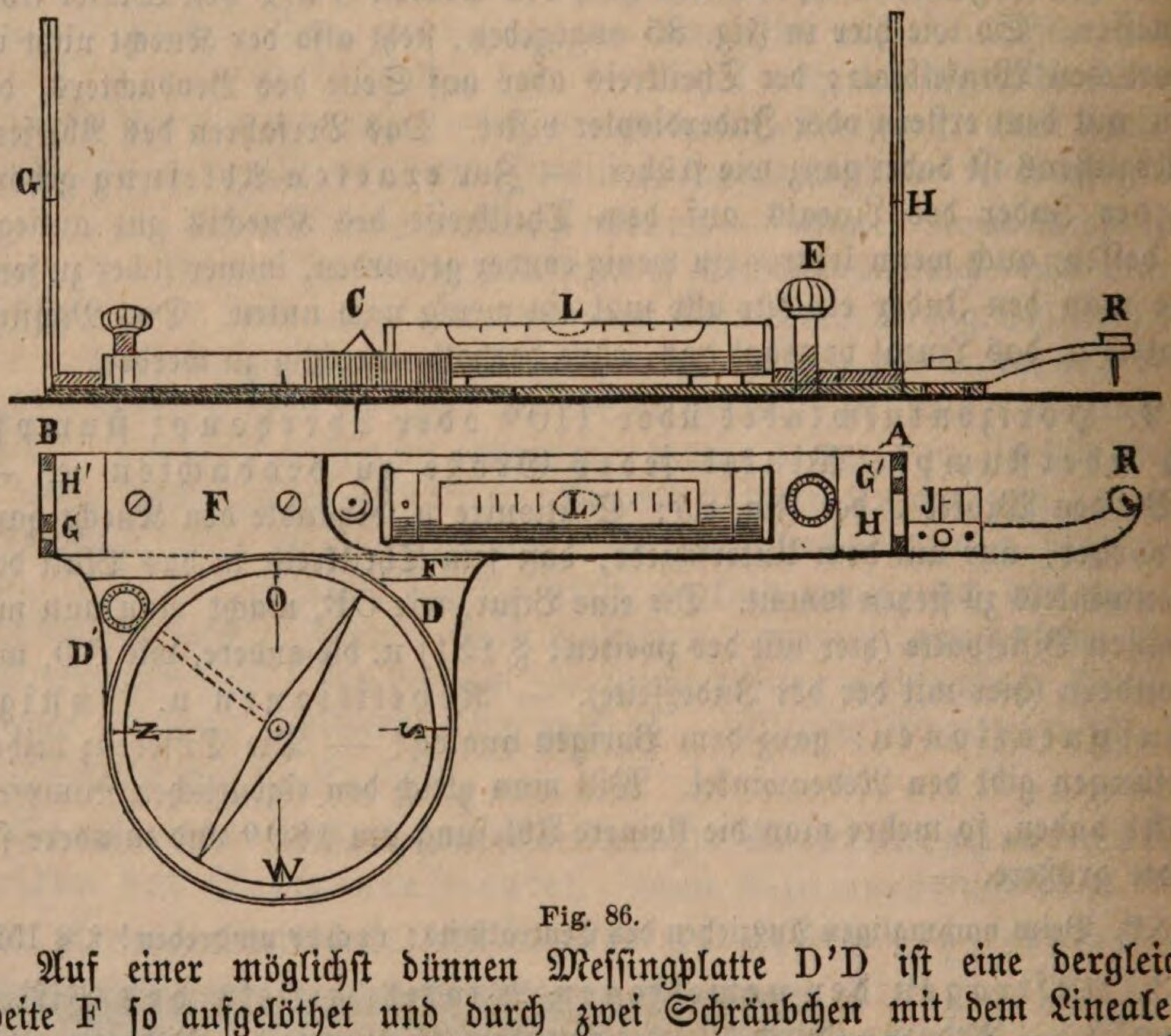


Fig. 86.

Auf einer möglichst dünnen Messingplatte D'D ist eine dergleichen zweite F so aufgelöthet und durch zwei Schräubchen mit dem Lineale so verbunden, daß die Platte D mit demselben einerlei Auflage hat u. zugleich an seiner Kante fest u. unverrückbar anliegt. Die Platte D trägt das Bussolengehäuse, das im Ganzen 55^{mm} Durchmesser, 8^{mm} Höhe u. darinnen eine nahe 50^{mm} lange Magnetnadel hat, die aber nicht durch Schieber sondern durch Schraube zu arretiren, deren Griff (am besten bei D') mindestens 15^{mm} Höhe haben muß, um ihn leicht handhaben zu können. Von den beiden mit N–S u. O–W zu bezeichnenden Orientirungsachsen hat die erstere N–S mit der Linealkante parallel zu gehn. — Hauptsache ist, daß Alles so leicht als nur möglich werde, daß also der betreffende Mechanikus mit Messing u. Glas möglichst karge; so daß das ganze Bussolchen mit Platten u. Schräubchen das Gewicht von 60 bis höchstens 70 Gramm od. 1/8 Pfund nicht überschreite.

Glasplatte u. Nadel sind so einzurichten, daß letztre auch unarretirt nie von ihrem Stifte herabfallen kann, mag man das Gehäuse auch halten u. erschüttern wie man wolle. (Wegen Preis u. Bezug s. die angeschlossenen desfallsigen Notizen u. Tarife.) Beim Stationiren mit übersprungenen Ständen, z. B. beim Umziehen eines Waldstücks, ist dann einfach so zu verfahren, daß man nach regelrechter Aufstellung des Knechts (§ 152) das Lineal (sei es bei Anfang od. Mitte od. Ende der Beobachtung) so stellt, daß die Magnetnadel genau auf ihre N- oder, je nach der Richtung des Winkelblatts, ihre O-Spalte einspielt. Hierauf wird dieser Orientirungsstand gleichfalls am Index nach Graden abgelesen. Aus der Differenz dieser Ablesung gegen die der beiden Winkelschenkel folgt nun selbstverständlich das Azimuth derselben gegen den magnetischen Meridian. Und kann man demnach bei polygonometrischen Aufnahmen mittels so armirten Knechtes, ganz wie bei der eigentlichen Gradbussole, nun ebenfalls einen Standpunkt um den andern überspringen. — Bei denjenigen Orientirungsstellungen, die nicht auf dem N- sondern nur auf dem O-Punkte möglich waren, ist natürlich jenes Azimuth entsprechend um 90° umzuändern. —

Wegen Auftragung solcher Aufnahmen, s. S. 99.

Zusatz. Daß das Ganze der geodätischen Meßknechts-Anwendungen durch eine wie vorbemerkte ermöglichte Erleichterung u. Bereicherung mittels Bussole einen dem Universellen näher kommenden Abschluß gewinne, ist allerdings eben so wenig in Abrede zu stellen, als daß dadurch zugleich ein nicht unwesentlich weiteres Gebiet von sowohl wirthschaftlich wie erzieherisch wohl beachtenswerthen Arbeiten u. Lösungen aufgeschlossen wird; Arbeiten, welche bis zu einem gewissen Grade nicht blos das Intresse des Forst-Ingenieurs sondern auch hin u. wieder einer jener allgemeinern gewerblichen od. realistischen Schulen verdienen kann, welche die ausübende angewandte Mathematik nicht blos als die nützliche Melkkuh „die uns mit Butter versorgt" betrachtet u. behandelt wissen wollen sondern zugleich auch „als die hohe himmlische Göttin", die ihre Jünger auch durch direkt auf Natur u. Leben bezogenes praktisch-wissenschaftliches Selbstdenken und Selbstthun zu möglichst intelligenten Menschen zu erziehen u. zu veredeln den Wunsch u. auch die Kraft besitzt.

NB. Mehrseitige Beispiele über Anwendungen des Knechts in seiner Eigenschaft eines gleichsam populären Taschentheodolit'chen, d. i. als Horizontal- u. Höhenkreis mit trigonometrischen Lösungen, s. u. A. auch im 2. Kapitel der 3. Auflage der mathematischen Brieftasche.

Erster Anhang zu Kapitel 12.

Zur Prüfung, Justirung und Conservirung des Visirlineals und seiner Bussole.

Beim Gebrauch mathematischer Instrumente soll man sich auch auf den besten Mechanikus nicht verlassen; um so weniger, je billiger die Sachen sind. Man muß daher, wo es sich um einigermaßen ernstere Anwendungen handelt, selbst prüfen, in wie weit der vom Verf. empfohlene Mechanikus seine Instruktion und sein gegebenes Versprechen, solcher gewissenhaft nachzugehen, erfüllt hat. Sollen nämlich die möglichen Leistungen des vorbeschriebenen Visir-Apparatchens seiner Natur gehörig entsprechen, so hat dasselbe folgenden Bedingungen u. Prüfungen zu genügen.

§ 155. **Prüfung des Lineals und dessen nächsten Zubehörs.**

1. Ob der Spielraum am Centrumsstift nicht zu gering? Stelle den Knecht horizontal und die Visur auf einen scharfen Zielpunkt; leises Klopfen mit dem Bleistift an die Visirschenkel muß sie schon verstellen.

2. Ob fraglicher Spielraum nicht zu groß? Visire einen Punkt an mit möglichst links an den Stift gedrücktem Lineal und lies den Stand des Index ab. Dann denselben Punkt mit rechts angedrücktem Lineal. Der Index darf gegen die erste Visur keine Aenderung zeigen.

3. Ob die Elevationsschraube E willig genug gehe? Stelle das Lineal auf den Knecht u. bringe die Libelle zum Einspielen (s. § 152). Versuche nun, die Blase durch die Schraube allein zu verstellen, was so geschehen muß, daß die Hand keinen Druck auf den Knecht auszuüben hat, welch letztres sich darin zeigt, daß nach Loslassen der Hand die Blase nicht zurückgeht.

4. Ob der Abstecher R mit dem Index J korrespondirt? Ziehe auf dem Papier eine gehörig lange Linie. In einem Endpunkte derselben beschreibe einen Kreis, der nur ein ganz klein wenig enger als das Centralloch des Lineals und setze letztres so auf, daß sein Centralloch mit jenem Kreis und zugleich sein Index genau mit der Linie stimmt. Dann muß der Stich des Abstechers ebenfalls genau auf diese Linie treffen.

5. Uebrigens soll die Entfernung von der Mitte gedachten Centrallochs bis zum Index 95½ bis 96 Millimeter betragen, damit der Index auf den Theilkreis passe. Wie man beide gegeneinander prüft u. justirt, ehe man das Centrum des letztern durchsticht: s. S. 97. Auch soll jeder Centrumsstift mit einem Vorstecker versehen sein, damit das Lineal nie herunterfallen könne.

§ 156. **Prüfung u. Justirung der Libelle.**

1. Ob die Libelle die angemessene Empfindlichkeit habe? Stelle den Knecht 15–20 Schritt von einer hellen Wand oder einer Nivellirlatte thunlichst horizontal auf (§ 152). Richte das Lineal nach jener Latte od. Wand; bringe die Blase, durch Klopfen auf den Knecht, eventuell durch die Elevationsschraube, zum genauen Einspielen auf die Mitte ihrer Röhre u. laß vom Gehülfen an Latte od. Wand den Punkt markiren, den daselbst die Nivellirvisur GH des Lineals anzeigt (§ 155). Hierauf hebe od. senke diese Visur, etwa mittels Elevationsschraube E od. Unterschiebung von Papier, gerade nur um soviel, daß das Querhaar jener Visur eine eben nur merkbare Abweichung an jener Latte od. Wand erkennen läßt. Thut jetzt gleiches auch die Blase der Libelle, so ist dieselbe recht; blieb sie unverändert, so ist sie zu grob (die Krümmung ihrer Röhre zu convex) u. daher zu genauern Einstellungen nicht brauchbar. Schlug sie aber zu weit aus, so ist sie unnöthig fein (ihre Röhre zu gradlinig) u. erschwert ohne wesentlichen Vortheil das Einstellen. Doch kann man sich einen mäßigen Grad von „zu fein" schon eher gefallen lassen, denn man hat dann für gewöhnlich nicht nöthig, darauf zu bestehn, daß die Blase ganz exact auf die Mitte einspiele.

2. Ob die Libelle richtig aufgesetzt d. h. mit ihrer Achse od. Sehne zur Linealbasis parallel sei? Entferne die Elevationsschraube E und stelle den Knecht mittels seines Lineals nach § 152 annähernd horizontal, hebe letztres vom Centrumsstifte ab, stelle es daneben genau parallel der Richtkante ab Fig. 84_2, also parallel den Linien der Kreistafel, bringe seine Libelle durch Klopfen auf den Knecht zum ganz exacten Einspielen u. ziehe nun die Preßschraube S der Pendelwand gehörig fester an. Hierauf verstelle das Lineal um 180° u. also zur vorigen Lage genau parallel. Spielt dabei die Blase nach der einen Seite etwas aus, so ist der Libellenfuß der entgegengesetzten Seite etwas zu niedrig u. um die Hälfte jenes Anschlags zu

justiren, indem man ihn von unten locker schraubt, ein Spitzchen angemessen feines Papier unterschiebt, wieder fest anzieht und die Prüfung repetirt.

Erste Prüfung u. Justirung der beiden Visirschenkel, d. i. absichts ihrer Vertikalvisuren zur Horizontalwinkelmessung. § 157.

1. Ob die beiden Okulardiopter d. i. die engen Visirschlitze beider Linealschenkel lothrecht zur Linealbasis stehn? An möglichst heller u. freier Wand einer Stube hänge ein von oben bis unten reichendes Loth auf, dessen Gewicht man, damit es ruhig bleibe, in ein mit Wasser gefülltes Gefäß tauchen läßt. Stelle dann den Knecht mit seinem Stative in möglichster Entfernung nach § 152 recht genau — besonders in der Querrichtung recht genau — horizontal auf, visire vom untersten Punkte des Indexschenkels nach der Haarmitte od. dem Fadenkreuze des zweiten u. stelle diesen Kreuzpunkt auf den Lothfaden ein. Visirt man nun vom obersten Punkte aus, und es weicht dabei dieser Kreuzpunkt nach links (od. rechts) vom Faden, so ist der Indexschenkel nach rechts (resp. links) geneigt u. durch Papierunterschiebung unter die rechte (linke) Seite seiner loszuschraubenden Fußplatte entsprechend zu korrigiren, bis daß der Fadenkreuz- od. Mittenpunkt des Objektivdiopters weder links noch rechts vom Lothfaden abweicht: mag man durch das oberste od. unterste Ende des Okulardiopters zielen. — In gleicher Weise ist der zweite Schenkel zu prüfen u. zu justiren. — Und kann man dort wie hier statt des Lothfadens als Vergleichsobjekt allenfalls auch die Kante eines freistehenden massiven Hauses wählen. Bei einfachem, in den Boden zu steckenden Stabstative ist letztres in der Regel der angezeigtere Weg.

2. Ob die beiden Objectivdiopter oder die beiden Vertikalhaare correct senkrecht zur Linealbasis stehn? Vorbereitung u. Aufstellung ganz wie vorher. Sodann Visiren nach vorbemerkter lothrechten Schnur od. Hauskante. Jedes der beiden Haare muß sich nun parallel dazu erweisen. Zeigt sich das eine od. andre (bei in der Querrichtung ganz genau einspielender justirter Libelle) schief, so ist dessen eines Einfädellöchelchen zu erweitern u. das Haar darin mittels Holzkeilchens so zur Seite zu drängen, daß es dann den geforderten Parallelismus zeigt.

3. Ob beide vertikale Visirebenen auch einander parallel? Stecke auf dem Felde eine Linie von mindestens drei, besser fünf Stäben ab. Stationire dann an Stelle des mittleren den Knecht recht exact u. horizontal (§ 152) u. richte die 1. Visirebene nach dem einen Stabe. Die zweite muß dann genau auf den entgegengesetzten treffen. Wo nicht, so wäre das zweite Haar durch Erweiterung seiner beiden Einfädellöcher parallel mit sich, soweit nöthig, zur Seite zu drängen.

4. Ein neues Haar einzuziehen? Am bequemsten für den Nichtmechanikus ganz so, wie bei den Nivellirdioptern der Pendelwand oder des kleinen Zeughäuschens gelehrt worden. (S. Faden statt Haar; § 144.)

Zweite Prüfung u. Justirung der beiden Visirschenkel, d. i. absichts ihrer Nivellirdiopter od. Horizontalvisuren. § 158.

1. Ob die erste Diopterachse (mit dem Indexschenkel als Okular) correct ist? Verfahre ganz nach § 145 mit dem Unterschiede, daß hier lediglich das Okularloch des Indexschenkels u. das Querhaar des andern, bei genau einspielender Libelle, dazu benutzt wird, den masgeblichen Horizontalpunkt zu finden. Zeigt sich dann die Nothwendigkeit einer Justirung, so geschieht diese ganz einfach dadurch, daß man das in der Platte befindliche verschiebbare Okularloch richtiger stellt.

2. Ob die zweite Diopterachse correct od. zur ersten parallel? Nachdem Voriges bewirkt, drehe das Lineal um 180° u. richte es bei genau einspielender Libelle nach denselben vorgedachten Horizontalpunkt. Wenn das Querhaar

denselben nicht genau trifft, dann einfach die Justirung wie vorher, d. i. durch Verschiebung des (zweiten) Okulars.

3. Ein neues Querhaar einzuziehen? S. § 144.

§ 159. **Prüfung u. Conservirung des Bussolchens.**

1. Ob das Büchschen mit Platte nicht über $1/_8$ Pfd. wiegt und das Glas so nahe am Hütchen, daß die Nadel nie herabfallen kann, gleichviel, wie auch das Ganze gehalten u. geschüttelt werde, u. ob die Arretirungsschraube leicht und gut ihre Schuldigkeit thue? ist alles durch selbstverständliches unmittelbares Probiren leicht zu untersuchen.

2. Ob die Nadel die gehörige Empfindlichkeit (ein Maximum an magnetischer Kraft, ein Minimum an Reibung) besitze? Bringe die Nadel bei horizontalgestelltem Knecht zum genauen Einspielen in einen der beiden Durchmesser N-S od. O-W, am besten unter Beobachtung mit der Lupe; u. versetze sie dann durch Annäherung eines Messers od. Schlüssels in Schwingungen, aus denen sie nur allmälig genau wieder auf ihrem vorigen Einspielpunkte zur Ruhe kommen darf.

3. Ob bei angeschraubter Bussole deren erster Durchmesser NS parallel zur Linealkante? Ueber ein Zeichnenbret ziehe eine Linie u. spanne mittels zweier gehörig entfernt von einander in diese Linie eingesteckter Nadeln einen recht feinen Faden darüber, nur ein ganz weniges höher als die Bussole. Bringe nun letztre, an's Lineal geschraubt, so unter den Faden, daß dieser mit dem Durchmesser NS genau zusammenfällt. Ziehe dann an der äußern Linealkante eine Linie und untersuche, ob letztre parallel zur erstern.

4. Zur Conservirung der Kraft u. Empfindlichkeit der Magnetnadel: transportire selbige nie ohne sie vorher arretirt zu haben; auch im Schranke od. Etui hebe man sie auf längere Zeit nicht auf, ohne sie arretirt zu haben, nachdem man sie vorher in den Meridian hat einspielen lassen. Ohne letztre Vorsicht würde sie ihre Kraft allmälig verlieren.

Unvollkommenheiten, die bei den Prüfungen sub 1—3 sich erweisen, werden jedoch in der Regel nicht ohne den Mechanikus zu beseitigen sein.

Zweiter Anhang zu Kap. 12.

Beispiele zum trigonometrisch-geodätischen Praktikum.

1. Beisp. Höhenmessung des Gießbachfalls der Schweiz, soweit derselbe vom vordern Gasthaus sichtbar. (Richtiger: Begründete Höhenschätzung, weil Standlinie AB abgeschritten u. BU geschätzt u. alle Winkel aus freier Hand, jedoch repetirt beobachtet worden.

AB = 90 Fß. sächs.; BU = 120 Fß. In A Elevation a = 26,2°, Depression d = 17°; in B Elevation b = 27,5°, Depression d' = 33°. Woraus folgt: $\angle$ ACB = b — a = 1,3°; und aus AB : BC = *sin.* C : *sin.* (a + d) . . .

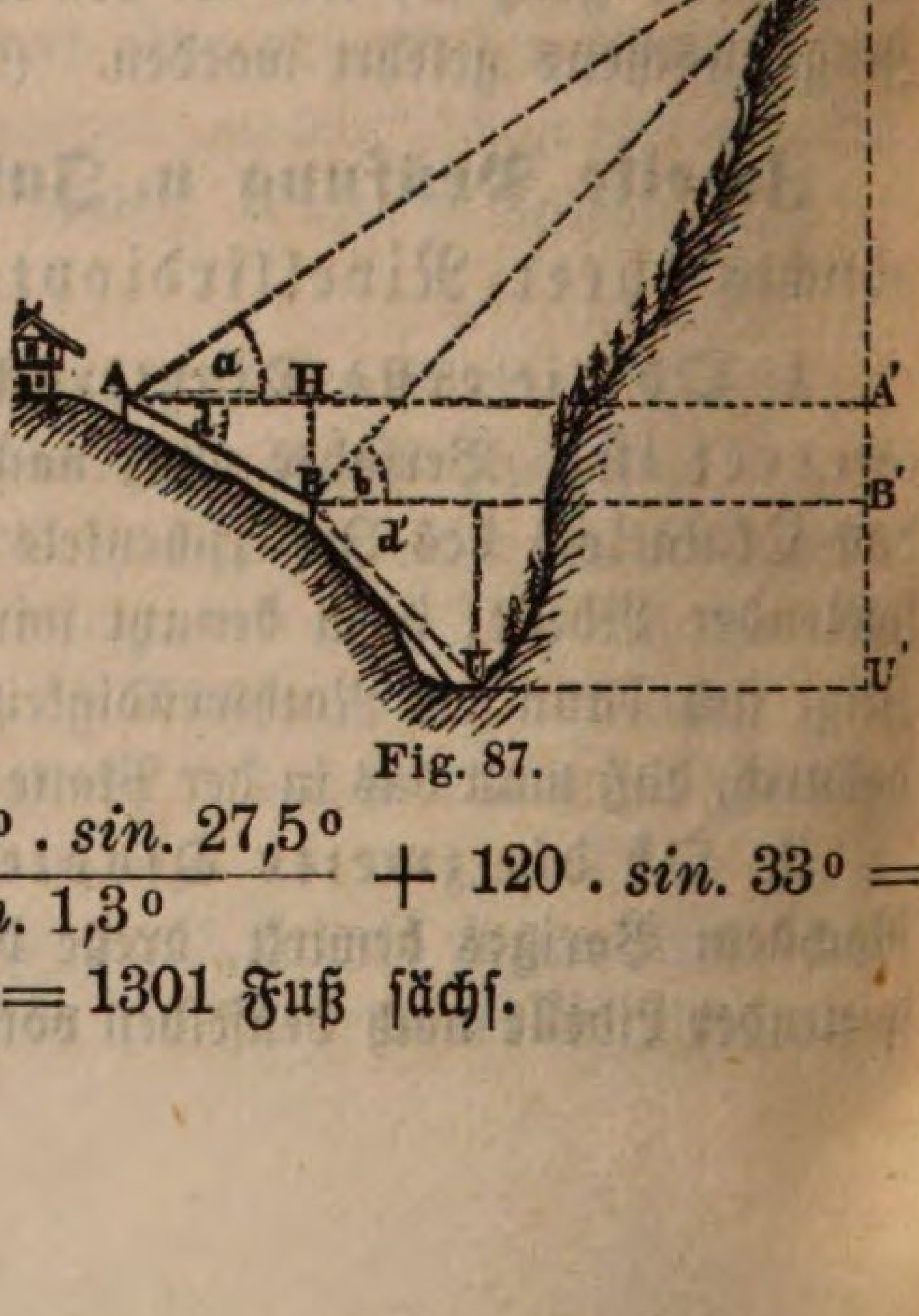


Fig. 87.

$BC = \frac{90 \,.\, sin.\, 43{,}2^0}{sin.\, 1{,}3^0}$. Ferner CB' = BC . *sin.* b $= \frac{90 \,.\, sin.\, 43{,}2^0}{sin.\, 1{,}3^0}\, sin.\, 27{,}5$; B'U' = BU *sin.* d' = 120 *sin.* 33°. Also $CU = 90 \,.\, \frac{sin.\, 43{,}2^0 \,.\, sin.\, 27{,}5^0}{sin.\, 1{,}3^0} + 120 \,.\, sin.\, 33^0 = 90 \,.\, \frac{0{,}685 \,.\, 0{,}461}{0{,}023} + 120 \,.\, 0{,}545 = 1236 + 65' = 1301$ Fuß sächs.

2. Beisp. Höhenmessung bei seitlich liegender Horizontalstandlinie AB. C der Aussichtspunkt Heinrichseck überm Badethale bei Tharand. AB im Thalgrunde = 327 sächs. Fuß. Der mit Visirlineal und an der Pendelwand mit den Nivellirdioptern versehene Stativknecht zeigt in A die Horizontalgröße des ∠ CAB = 98,25° u. die Elevation AC = 23,7°; u. in B die Horizontalgröße des ∠ ABC = 65,8° und die Elevation BC = 22,1°. Somit auch Horizontalwinkel ACB d. i. die Projektion ADB = 180 — (98,25 + 65,8) = 15,95°. Woraus zunächst aus AB : AD = *sin.* D : *sin.* B folgt: 1.) AD = 327 . *sin.* 65,8° : *sin.* 15,95° = 1085'. Und hieraus 2.) DC = AD *tg.* 23,7° = 1085 . 0,44 = 486' + Stativhöhe = 491'. Die (ähnliche) Controlberechnung aus der Elevation in B ergab zunächst BD = 1175' u. daraus CD = 1175 *tg.* 22,1° = 479' + Stativhöhe = 484 Fß. Also das Mittel = 487½'. (Eine Theodolitenbeobachtung ergab 479,7' od. rund 480 Fuß.)

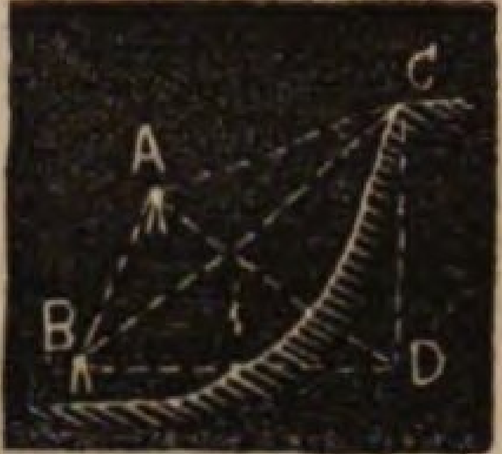


Fig. 88.

3. Beisp. Trigonometrisches Vorwärtseinschneiden. Von der Standlinie AB aus die Entfernungen u. Größen umliegender Punkte u. Figuren zu bestimmen; z. B. hinsichts der Punkte C u. D. Wenn AB = 120 Ruth. u. mit dem Horizontalkreis des Knt. beobachtet ist ∠ CAD = 35,7; ∠ CAB = 57,2⁻; ∠ DBC = 24,3; ∠ DBA = 78,2 (also ∠ DAB = 21,5; ∠ CBA = 53,9; ∠ ACB = 68,9; ∠ ADB = 80,3), so folgt nach dem bekannten Satze: „die Seiten der Dreiecke verhalten sich wie die Sinusse ihrer Gegenwinkel", AC = 103,8; AD = 119,1 ꝛc.; sowie aus AC, AD u. ihrem Zwischenwinkel nach dem Cotes'schen Satze*) CD = 69,85. U. s. w.



Fig. 89.

4. Beisp. Trigonometrisches Rückwärtseinschneiden. Durch Beobachtung der nach ihren Entfernungen (also auch ihren Winkeln) gegebenen drei Terrainpunkte A, B u. C die Lage D einer beliebigen Station zu finden. Sind A, B u. C die Winkel des gegebenen Dreiecks, a, b u. c ihre Gegenseiten; u. werden bei D die Winkel α u. β gemessen u. 360 — ($\alpha + \beta$ + B) = γ u. ∠ BAD = δ gesetzt; [so hat man daraus ∠ BCD = 360 — α — β — B — δ = γ — δ; u. aus den beiden Dreiecken ABD u. BCD nach dem Sinussatze

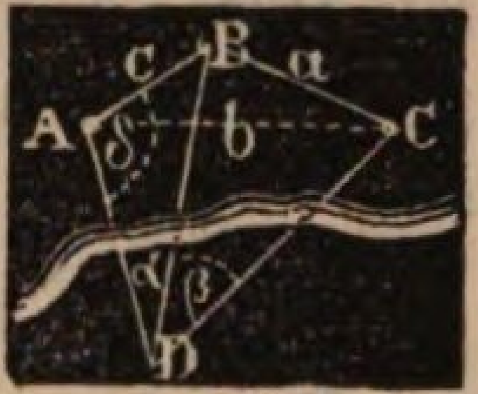


Fig. 90.

$$BD = \frac{c\ sin.\ \delta}{sin.\ \alpha},\ \text{auch}\ BD = \frac{a\ sin.\ (\gamma - \delta)}{sin.\ \beta} = \frac{a\ sin.\ \gamma\ cos.\ \delta - a\ sin.\ \delta\ cos.\ \gamma}{sin.\ \beta}$$

und durch Gleichstellung beider Werthe

$$c\ sin.\ \delta\ sin.\ \beta = (a\ sin.\ \gamma\ cos.\ \delta - a\ sin.\ \delta\ cos.\ \gamma)\ sin.\ \alpha;\ \text{hieraus:}$$

$$sin.\ \delta\ (c\ sin.\ \beta + a\ sin.\ \alpha\ cos.\ \gamma) = a\ sin.\ \alpha\ sin.\ \gamma\ cos.\ \delta;$$

und endlich durch Division mit $cos.\ \delta$

1) $tg.\ \delta = (a\ sin.\ \alpha\ sin.\ \gamma) : (c\ sin.\ \beta + a\ sin.\ \alpha\ cos.\ \gamma)$.

Und weil nun durch δ alle andern Winkel bekannt werden, findet sich leicht

2) $AD = c\ sin.\ (\alpha + \delta) : sin.\ \alpha;\ BD = c\ sin.\ \delta : sin.\ \alpha;\ CD = a\ sin.\ (\beta + \gamma - \delta) : sin.\ \beta$.

5. Beisp. Trigonometrische Flächenmessungen.

1. Dreieck ABC aus dem bei B beobachteten Winkel u. dessen Nebenseiten ... Inhalt = ½ BA . BC . *sin.* B. Z. B. Wenn BA = 40 u. BC = 50 Ruthen, u. Winkel B = 84,5° (dessen *Sin.* aus dem Knecht mit 0,9954 zu ersehen ist), so folgt, daß die Ecke ABC = 40,50 . 0,9954 : 2 = 100 . 0,9954 = 99,54 □ Ruthen.

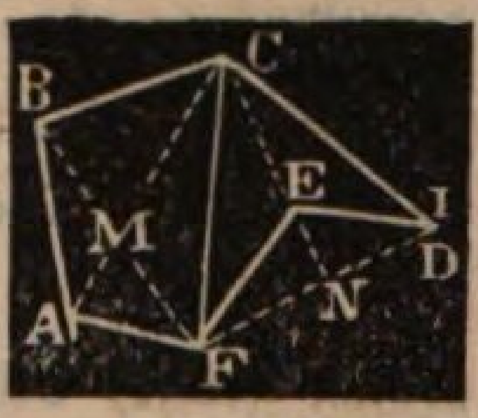


Fig. 91.

2. Unreguläres Viereck ABCF od. CDEF aus seinen Diagonalen u. deren (bei M od. N beobachteten) Durchschnittswinkel: Inhalt v. ABCF = ½ AC . BF *sin.* M u. ebenso Inhalt von CDEF = ½ CE . FD *sin.* N. Wenn der bei N aufgestellte

*) Vgl. „Brieftasche", Kapitel Planimetrie (3. Aufl. S. 57).

Knecht den einen der dasigen Winkel mit 63,4° (dessen *Sin.* laut Knecht = 0,894), u. außerdem FD = 60 u. CE = 30 Ruthen sich ergab, so folgt für das Stück FCDE der Inhalt = 30 . 30 . 0,894 = 80,5 □ Ruthen.

6. Beisp. Trigonometrische Vermessung u. Berechnung eines Polygons aus dem Umfange, z. B. eines um ein Waldstück gezogenen Standliniennetzes, mit der Transversale (nicht nothwendig Diagonale) AF als Abscissenbasis. Beispielsweise Berechnung der einen Hälfte ABCDEF u. zwar auf dem Wege der Elementartrigonometrie.

(Wegen Lösung auf cultivirterm Wege: s. unten im 2. Zusatz.)

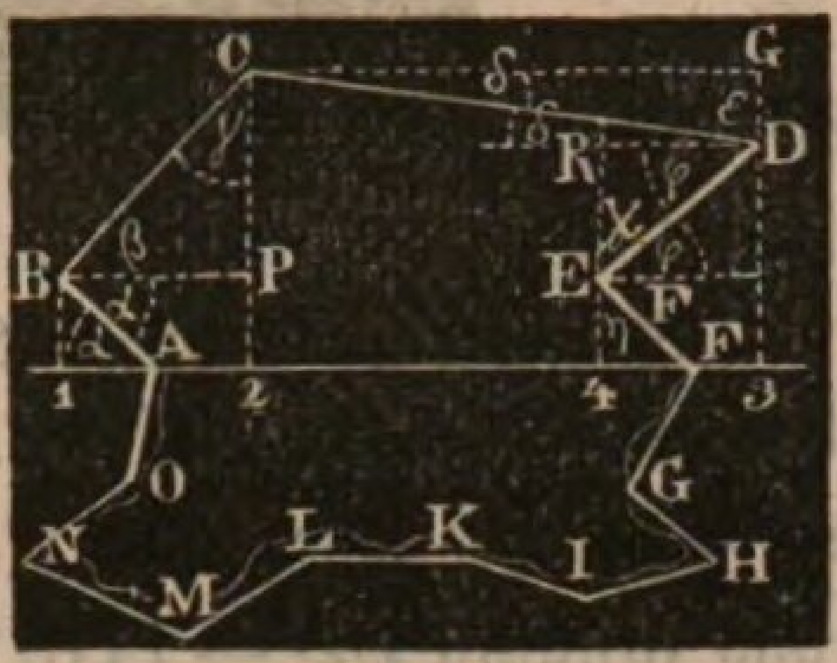


Fig. 92.

Gemessene Winkel:

BAF	od. A	= 110,3°
ABC	„ B	= 105,9
BCD	„ C	= 131,6
CDE	„ D	= 39,8
DEF	„ E	= 295,4
EFA	„ F	= 37,3
	Sa.	720,3°

Da die Summe bei jeder aus n Seiten od. n Ecken besteh. Fig. = (n—2) 180°, also für dies Sechseck = 720° sein muß, wird eine kl. Berichtigung nöthig, und man hat dann

Verbesserte Winkel:

A.	110,3
B.	105,8
C.	131,6
D.	39,7
E.	295,4
F.	37,2

Sind nun die gemessenen Seiten:

AB = a =	35,3	Rth.
BC = b =	72,8	„
CD = c =	98,4	„
DE = d =	59,6	„
EF = e =	46,4	„
FA = f =	125,4	„

so entwickelt sich diese Aufgabe wie folgt:

Nachdem mittels des Horizontalkreises od. auch der Chordentafel des Knechts das umzogene Netz ABCDEF flüchtig aufgetragen u. durch alle seine Ecken Parallelen u. Perpendikel zur erwählten Basis AF eingezeichnet worden, ergeben sich leicht

die Hülfswinkel:

$\alpha = 180 - A = 69{,}7^\circ$
$\beta = B - \alpha = 36{,}1$
$\gamma = 90 - \beta = 53{,}9$
$\delta = \gamma + 90 - C = 12{,}3$
$\varepsilon = 90 - \delta = 77{,}4$
$\varphi = D - \delta = 27{,}4$
$\chi = 90 - \varphi = 62{,}6$
$\eta = E - \chi - 180 = 52{,}8$
(auch $\eta = 90 - F = 52{,}8$)

mit den zugehörigen Seiten:

AB = a =	35,3
BC = b =	72,8
CD = c =	98,4
DE = d =	59,6
EF = e =	46,4
FA = f =	125,4

Daraus zunächst für die Ordinaten lt. Sinustaf.*) des Knechts:

Berechnete Glieder:	**) verbess.	Ganze
$+B1 = a \,.\, sin.\alpha = 35{,}3\ sin.69{,}7 = 35{,}3 \,.\, 0{,}938 = +33{,}1$	+33,2	B1 = 33,2
$+CR = b \,.\, sin.\beta = 72{,}8\ sin.36{,}1 = 72{,}8 \,.\, 0{,}589 = +42{,}9$	+43,0	C2 = 76,2
$-QD = c \,.\, sin.\delta = 98{,}4\ sin.12{,}3 = 98{,}4 \,.\, 0{,}214 = -21{,}1$	−20,9	D3 = 55,3
$-RE = d \,.\, sin.\varphi = 59{,}6\ sin.27{,}4 = 59{,}6 \,.\, 0{,}460 = -27{,}4$	−27,3	E4 = 28,0
$-E4 = e \,.\, sin.F = 46{,}4\ sin.37{,}2 = 46{,}4 \,.\, 0{,}605 = -28{,}1$	−28,0	F = 0,0
**) Sa. — 0,6	= 0,0	

*) od. lt. Chordentafel. —

**) Da die (n—1)te od. letzte Ordinate = 0 sein muß, so wird wegen —0,6 eine Verbesserung jedes Gliedes um + 0,6 : 5 = + 0,12 nöthig. Das successive Addiren der verbess. Glieder gibt dann die Ordinaten (Ganze).

Und ähnlicher Weise für die Abscissen lt. Cosinustaf. des Knechts:

Berechnete Glieder:	*) verbess.	Ganze
$-A1 = a \,.\, cos.\alpha = 35{,}3\ cos.69{,}7 = 35{,}3 \,.\, 0{,}347 = -12{,}3$	−12,5	A1 = 12,5
$+BP = b \,.\, cos.\beta = 72{,}8\ cos.36{,}1 = 72{,}8 \,.\, 0{,}808 = +58{,}8$	+58,5	A2 = 46,0
$+CQ = c \,.\, cos\ \delta = 98{,}4\ cos.12{,}3 = 98{,}4 \,.\, 0{,}977 = +96{,}1$	+95,9	A3 = 141,9
$-DQ = d \,.\, cos.\varphi = 59{,}6\ cos.27{,}4 = 59{,}6 \,.\, 0{,}888 = -52{,}9$	−53,2	A4 = 88,7
$+4F = e \,.\, cos.F = 46{,}4\ cos.37{,}2 = 46{,}4 \,.\, 0{,}796 = +36{,}9$	+36,7	A5 = 125,4
*) Sa. 126,6	125,4	

*) Da diese (n—1)te od. letzte Abscisse = der Basis (125,4) sein muß, so wird wegen 126,6 — 125,4 = 1,2 eine Correction jedes Gliedes um = 1,2 : 5 = — 0,24 nöthig. Die successive Addition der verbess. Glieder gibt alsdann die Abscissen. Die Berechnung kann auch durch die Sinus- od. Chordentafel mittels der Complementswinkel γ, ε 2c. bewirkt werden.

Die Kartirung erfolgt nunmehr mittels der Auftragung der Coordinaten, und die Flächenberechnung auch ohne vorherige Zeichnung nach bekannter Trapezialmethode aus den rechnungsmäßigen Coordinaten. — Die Berechnung der Coordinaten kann durch die Logarithmentafel erleichtert werden.

1. Zus. Die andre Hälfte der Figur berechnet sich auf ganz gleiche Weise. — Man sieht, die Winkel bei F sind zur eigentlichen Berechnung nicht, sondern nur zur Kontrole zu messen nöthig, können also zur Noth entbehrt werden; eben so die Messung der Transversale AF, da letztere sich aus der Summe sämmtlicher Abscissenglieder ergibt u. dabei zugleich durch die der andern Hälfte kontrolirt u. justirt wird.

2. Zus. Betreffs der wissenschaftlich vollkommnern „polygonometrischen" Auflösung von derlei Berechnungen 2c. s. Polytechnische Brieftasche 3. Aufl. S. 20.

Metrologischer Anhang

ein Bruchstück **aus den Supplementstafeln** zu Verfasser's

HOLZCUBIRER u. FORSTTAXATOR

als **Ersatz** für

das auf den Seiten 22 bis 28 angezogene Kapitel III

der mathematischen u. polytechnischen Brieftasche.

Nota bene!

Die auf den SS. 22 bis 28 des „Aschenbrödel" mit angeführten Tabellen-Nummern beziehen sich jedoch nicht auf die nachfolgende Anordnung, sondern auf die der genannten Brieftasche.

Zunächst für's norddeutsche Bundesgebiet

ist das im Nachfolgenden sub 5 aufgeführte „neue deutsche" Massystem zur gesetzlichen Einführung mit Beginn des Jahres 1872 in folgender Weise näher festgestellt worden. — Im Allgemeinen sollen ganz nach französischem Vorgange die zehntheiligen Abstufungen

nach unten durch die lateinischen { **Deci-,** (Zehntel-) **Centi-,** (Hundertel-) **Milli-,** (Tausendtel-)

nach oben durch die griechischen { **Deka-,** (Zehnfach) **Hekto-,** (Hundertfach) **Kilo-,** (Tausendfach)

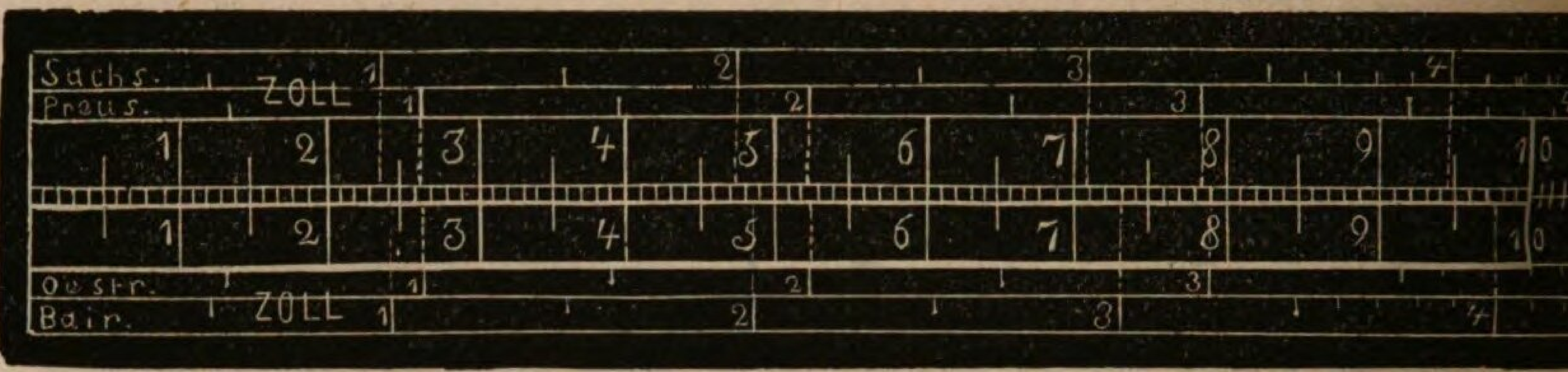
Vorworte unterschieden und mit Ausschluß eines neuen Fußes nur das Meter als Haupteinheit gestattet werden.

Wegen des Näheren über Grund u. Größe vom Meter siehe die nachfolgenden Mastafeln sub 1 u. 6 u. hinter 30; und dazu aus folgender Figur die

Naturgrösse von 1/10 Meter = 1 Deci^m = 10 Centi^m = 100 Milli^m

im Vergleich zum preuss. u. östr. (u. sächs. u. bayr. Duodez-) Zoll.

(Gleichzeitig zur Veranschaulichung des □-Centi- u. □-Millimeter.)



Und ist hiernach anzuwenden was folgt:

a) **Längenmase.** Das Meter (Stab) = 10 Decimeter = 100 Centimeter (Neuzoll) = 1000 Millimeter (Strich) . . ($1^m = 10^{dm} = 100^{cm} = 1000^{mm}$). — Das Dekameter od. die Kette = 10^m; das Kilometer = 1000^m ($1^{Dm} = 10^m$; $1^{km} = 1000^m$); die Meile = 7500^m.

b) **Flächenmase.** Außer dem Quadratmeter (Q^m) das Ar = 100 Q^m = 1 Quadratkette od. 1^{Dm} ins □; u. das Hektar = 100 Ar = 100^m ins □, = 1^{hm} ins □ ($1^a = 100\ Q^m$; $1^{ha} = 100^a = 1\ Q^{hm}$).

c) **Körpermase.** Außer dem Cubicmeter (C^m) das Liter od. die Kanne = $1/_{1000}\ C^m$; das Hektoliter od. Faß = 100 Lit. = $1/_{10}\ C^m$; dazu der Schoppen = ½ Lit. und der Scheffel = ½ Faß ($1\ C^m = 10^{hl}$ od. Faß; = 20 Scheffel; = 1000^l od. Kannen).

Wegen des „Scheit" für's Forst- u. Bauwesen siehe hinter Taf. 30.

d) **Gewichte.** Als Basis das Gramm; = Gewicht von 1 Cub.-Centimeter destillirten Wasser bei + 4° C. Abwärts: das Deci-, Centi- u. Milligramm ($1^g = 10^{dg} = 100^{cg} = 1000^{mg}$). Aufwärts: das Neuloth = 10^g; das Kilogramm (1^{kg}) = 1000 Gramm, = Gewicht v. 1 Lit. Wasser; und dazu das Pfund = $1/_2{}^{kg}$ = 500^g; der Centner = 50^{kg} od. 100 Pfd.; die Tonne = 1000^{kg} od. 20 Centner. 1 Tonne = 1000^{kg} à 100 Nlth. à 10^g; od. = 20 Ctr. à 100 Pfd. à 50 Lth. à 10^g 1 Neu-Loth = ³/₅ od. 0,6 alte Loth; 1 altes Loth = 1²/₃ Nlth.

(Also 1 C^m Wasser = 1000^{kg}; dreistelliges Rechtsrücken des Komma in der Spezifischgewichtszahl eines Körpers gibt dessen Cub.^{m}-Gewicht nach Kilogrammen, wenn das Spezifgew. sich auf die Temperatur bei 4° Cels. bezieht. Bezog sich dasselbe aber, wie bisher gewöhnlich, auf die Mittel-Temperatur 15° R. od. 19° C., so ist voriger Werth um knapp 1 % zu mindern.)

e) **Combinirte Mase** als z. B.: Cub.^{m} pro Hektar; Faß od. Scheffel od. Hektoliter pro Hektar ꝛc. sind hiernach selbstverständlich. S. Suppl. III die Mastaf. 12—15 u. 22—24.

f) **Zur Vergleichung u. Umrechnung** dieser neuen Mase (der einfachen wie der combinirten) gegen die alten u. umgekehrt dienen in Forstlichen Hülfsbuch's Suppl. III vorzugsweise die Mastafeln **6** bis **24** und hinter **30**.

Mas, Gewicht und Geld.

1—5. Name, Bezeichnung, Grösse und Eintheilung.

1. Neu-französisches oder metrisches System.

Als Basis u. für Längen: Das **Meter** (..^{m}) = 1 Zehnmillionstel der Länge des Erdmeridian-Quadranten*), mit 10theiliger Auf- u. Abstufung, wobei den Obermasen die entsprechenden **griechischen**, den Untermasen die resp. **lateinischen** Zahlwörter vorgesetzt werden. — 1 Meter (1^m) = 10 **Decimeter** = 100 **Centim.** = 1000 **Millim.**, od. 1^m = 100^{cm} = 1000^{mm}; 10^m = 1 **Dekameter** (neue Ruthe); 100^m = 1 **Hectometer** = 1^{hm}; 1000^m = 1 **Kilometer** = 1^{km}; 10000^m = 1 **Myriameter** (2^m = neue Toise; 8000^m = Poste; Myria$^{m.}$ = neue Lieue).

*) Auf Beschluß der Revolutions-Regierung, nach den geodätisch-astronomischen Gradmessungen von **Delambre** u. **Mechain** &c. Ende des 18. Jahrhunderts. Nach **Bessel's** Nachweisen aber haben die Franzosen den Quadranten um 859 Meter zu klein berechnet.

Für Feldflächen: Das **Ar** (oder are); 1^a = 1 □-Deka^m, = 10^m ins □, = 100 Quadrat^m (od. 100 Q.^{m}); u. das **Hectar**, 1^{ha} = 100^a od. = 100^m ins □, = 1 Q.^{hm} = 10000 Q.^{m}. — **Für Körper als Basis aller Hohlmase:** Das **Liter**; 1^l = 1 Deci^m im Würfel, = 1000 Cubic-Centimeter (welche 1000 C^{cm} = 1000 Gramm od. 1 Kilogramm rein. Wasser bei der Temp. v. 4° C.); u. das **Hectoliter**, wo 1^{hl} = 100^l (= Raum v. 100 Kilogramm rein. Wasser) = 0,1 Cub^m; 1 C^m also = 10^{hl}. **Derb- u. Schichtmas für Holz, Kohlen, Steine** u. dgl.: Das Cubicmeter unter den Namen **Stèr** (stère); also 1^s = 1 C^m = 1000^l (= 1000^{kg} Wassergewicht, siehe folgend). — **Für's Gewicht:** Das **Gramm**; 1^g = Gewicht v. 1 Cub.-Centi^m destill. Wassers bei größter Dichte od. 4° Cent.; u. das **Kilogramm**, 1^{kg} = 1000^g = Wassergewicht des Liter, u. das **Millier** od die metrische **Tonne** = 1000^{kg} (= 20 deutsche Centner) = Wassergewicht des Cubicmeter.

2. Andre allgemeine Mase. (Neudeutsche s. unter 5.)

Geograph. Meile (= deutsch-östreich. Postvereins-Meile) = $\frac{1}{15}$ der Länge eines Aequatorgrades = 7420.16^m. 1 (engl., franz. &c.) **Seemeile** = $\frac{1}{4}$ geogr. Meile, also 60 = 1 Aeq.-Grad. 1 **Knoten** = $\frac{1}{120}$ Seemeile. (**So viele Knoten** der Logschnur während Ablaufs der sonst üblichen Halbsekunden-Sanduhr ein Schiff zurücklegt: **so viele Seemeilen** also pro Stunde). — 1 **Elle** in der Regel = 2 Fuß; Ausnahmen s. sub 3. Auf deutschen Messen gilt: 11 **Berliner** Ellen = 8 engl. **Yard**; 8 **Leipziger** Ell. = 5 Y.; 5 **Frankfurter** Ell. = 4 **Frankf.-Brabant.** Ell. = 3 Y.; eigentliche **Brabanter** Elle = 695^{mm}, **Hamburger** Brab. Ell. = 691,4^{mm}, **Leipziger** Brab. Ell. = 685,6^{mm}. — Das in den meisten (deutsch.) Staaten landüblich gewordene neue **preußisch-deutsche** u. **Zoll**(vereins)-**Gewicht** lautet: $\frac{1}{2}$ Kilogramm od. 500^g = 1 Pfund à 30 Loth à 10 Quent à 10 Cent à 30 Korn, od. auch 1 Pfd. = 100 Centaß = 10000 Aß; 100 Pfd. = 1 Centner; 20 Centner od. 1000^{kg} = 1 Tonne; 2 Tonnen = 40 Ctr. = 1 **Schiffslast**. **Altes Kölnisches Gewicht**: 1 Pfund = 2 Mark = 16 Unzen = 467,6^g; 467,711^g = altes **preuß.** Pfd. à 2 Mark à 288 Grän, nahe = vielen der ältern deutsch. Pfunde (Leipzig = 467,214^g).

3. Specielle Mase. (Wegen der metrischen Maszeichen s. sub 1.)

Baden: 0,3^m = 1' à 10"; Klftr. 6'; Ruthe 10' od. 3^m; Meile = 8889^m; Morgen 400 Q.-Rth. od. 40000 Q.'; Mas od. Mäslein 1,5^l; 1 Fuder (Wein) = 10 Ohm à 10 Stützen à 10 Mas à 4 Schoppen; 1 Tuber (Getraide; = 1 Fuder) = 10 Malter à 10 Sester à 10 Mäslein à 10 Becher; 1 Klftr. (Holz) = 6 × 6 Q.' Stirnfl. (u. gewöhnl. 4' Länge); 1 Pfund = $\frac{1}{2}$^{kg} = 500^g; 1 Centner = 100 Pfd. = 50^{kg}. — **Bayern:** 291,86^{mm} = 1' à 12 u. 10"; Elle 2$\frac{41}{48}$'; Klftr. 6'; Ruthe 10'; Tagwerk 400 Q.-Rth. od. 40000 Q.'; Maskanne od. Mas 43 Dec.-Cub." = 1,069^l; 60 Mas = 1 Wein- u. Handels-Eimer; 64 Mas = 1 Visir- u. Bier-Eimer, davon 25 = 1 Faß; 1 Schffl. = 6 Metzen = 208 Maskannen = 222,357^l; 1 Klftr. Holz = 6 × 6 Q.' Stirn mit 3 bis 4' L.; 1 Pfund = 560^g (fast = wiener Pfd.); 1 Centner = 5 Stein = 100 Pfd. à 32 Loth à 4 Quent. — **Belgien:** metrisch, siehe 1. — **Braunschweig:** 285,36^{mm} = 1' à 12"; Ruthe 16'; Lachter 80,7"; Feldmorgen = 120 Q.-Rth.; Waldmorgen = 160 Q.-Rth. = 40960 Q.' = 1,306 preuß. Morg. = 0,3334^{ha}; 1 Quartier = Raum von 2 Pfd. rein. Wasser bei 15° R., = 69$\frac{2}{3}$ C' = 0,937^l; 1 Fuder = 4 Oxhoft = 6 Ohm à 4 Anker à 40 Quartier; 1 Himten (à 4 Vierfaß à 4 Metzen) = 2316 C" = 31,145^l; 40 Himt. = 1 Wispel; 1 Malter Holz = 80 C'; 1 Karre (Holz-) Kohlen = 100 C'; 1 Schachtruthe = 256 C'. — **Bremen:** 289,35^{mm} = 1' à 12"; Klftr. 6'; Ruthe 16, 18 u. 20'; 1 Wein-Stübchen

Mas, Gewicht und Geld.

1—5. Name, Bezeichnung, Grösse und Eintheilung.

= 3,221$'$; 1 Bier-Stübch. = 3,772$'$; 1 Ohm = 4 Anker = 45 Stübch. à 4 Quartier; 1 Fuder = 4 Oxhoft = 6 Ohm; 1 Schffl. = 74,104$'$; 1 Last = 4 Quartier à 10 Schffl. à 4 Viertel; 1 Faden Holz = 6 . 6 . 2 (auch 3) C$'$. (Altgewicht: 1 Ctr. = 160 Handelspfund à 489,5^{g}; 4000 Pfd. = 1 Last.)

Dänemark: Fuß = preuß. $'$ à 12$''$; Faden 6$'$; Ruthe 10$'$; Meile 24000$'$; Tonne Land = 560 Q.-Rth. od. 56000 Q.$'$ (1 Tonne = 0,552^{ha}; 1^{ha} = 1,813 To.); 1 Pott (flüss.) = $^{1}/_{32}$ C$'$ = 0,966$'$; 1 Kanne = 2 Pott à 4 Pegel; 1 Faß od. Fuder = 2 Pipen à 2 Oxhoft à $1^{1}/_{2}$ Ohm à 4 Anker à 39 Pott; 1 Tonne Korn = $4^{1}/_{2}$ C$'$ = 139,121$'$; 1 Last = 22 Tonn. à 8 Schffl.; 1 Faden Holz = 6 . 6 . 2 C$'$; Gewicht: metrisch, s. sub **1.**; 1 Liespfund = 8^{kg}; 1 Schiffspfund = 20 Liespfund. —

England: 304,793^{mm} = 1$'$ à 12$''$; 3$'$ = 1 Yard; Faden 2 Y.; Ruthe (Pole) $5^{1}/_{2}$ Y.; Meile 5280$'$ od. 1609^{m}; Acker 160 Q.-Rth. od. 43560 Q.$'$; 1 Gallon (Flüss.) = 277,27 C$''$ = 4,543$'$; 1 Last = 2 Tonnen à 5 Quarter à 8 Bushel à 8 Gallon; 1 Pfund „Avoir du poids" Gew. = 453,6^{g}; 1 Pfund „Troy" Gew. = 5760 Grän = 373,25^{g}; 1 Tonne = 20 Ctr. à 112 Pfd. (Auch metrische Tonnen; s. sub **1.**)

Frankreich: s. oben sub **1.** — **Altes Pariser** Mas: 324,8394^{mm} = 1$'$ à 12$''$ à 12$'''$; 1 pariser $''$ = 2,706995^{cm}; 1 pariser $'''$ = 2,255829^{mm} (also 1^{m} = 3,078444$'$ = 36,94133$''$ = 443,296$'''$ alt-pariser Mas); alte Toise = 6$'$ = 1,94904^{m}. (1 Bordeaux-Oxhoft = 228^{l}.) — Alt. Pfund = 489,506^{g}. —

Griechenland: Neue Piki (Elle) = 1^{m} = 10 Palmi = 100$''$ = 1000$'''$; 1 Meile = 10 Stadien = 10000 Piki; das Liter à 10 Kotyli à 10 Mystra à 10 Cubus; neues Kilo = 3,016 alte K. = 1 Hectoliter. —

Hamburg (Holstein): 286,42^{mm} = 1$'$ à 12$''$; Klftr. 6$'$; Ruthe 14 u. 16$'$; 1 Morgen = 600 Marsch □-Rth. = 117600 Q.$'$; 1 Oxhoft = $1^{1}/_{2}$ Ohm = 6 Anker = 217,4$'$; 1 Faß Korn = 3872 C$''$ = 52,734$'$; 1 Last = 60 Faß à 2 Himten à 4 Spint à 4 große Mas; 1 Wispel = 10 Schffl. à 2 u. 3 Faß; 1 Klftr. Holz $6^{2}/_{3}$. $6^{2}/_{3}$. 2 C$'$; (Alt. Gewicht: 1 Ctr. = 112 Pfd. à 484,2^{g}; 1 Schiffspfund = 20 Liespfund à 14 Pfd.; 1 Last = 4000 Pfd.). — **Hannover:** 292,09^{mm} = 1$'$ à 12$''$; Klftr. 6$'$; Ruthe 16$'$ = 4,674^{m}; Clausthaler Lachter $851^{1}/_{4}$ par. $'''$; (Feld-) Morgen = 120 Q.-Rth. = 30720 Q.$'$; (Calenberger) Waldmorgen = $1^{1}/_{3}$ Feld-Morgen = 160 Q.-Rth.; 1 Stübchen = 270 C$''$ = 3,894$'$; 1 Ohm = 4 Anker à 10 Stübchen à 2 Kann. od. 4 Quartier; 1 Himten = $1^{1}/_{4}$ C$'$ = 31,152$'$; 1 Last = 16 Malter à 6 Himt. à 4 Metzen od. Spint; 1 Klftr. Holz = 144 C$'$; 1 Malter Holz = 80 C$'$. — **Hessen-Cassel:** 287,7^{mm} = 1$'$ à 12$''$ = 11$''$ preuß.; 1 Acker = 150 Q.-Rth. = 29400 Q.$'$ = 0,935^{ha} (1^{ha} = 1,191^{A}); 1 Mas Wein = 1,9495$'$; 1 Mas Bier = 2,184$'$; 1 Ohm = 20 Viertel à 4 Mas à 4 Schoppen; 1 Malter = 4 Viertel à 2 Schffl. à 2 Himt. à 4 Metzen. — **Hessen-Darmstadt:** $^{1}/_{4}{}^{m}$ = 1$'$ à 10$''$; Elle = 2,4$'$; Klftr. = 10$'$ = 2,5^{m}; Meile 7500^{m}; 1 Morg. = 400 Q.-Rth. od. 40000 Q.$'$ (1 Mg. = $^{1}/_{4}{}^{ha}$; 1^{ha} = 4 Mg.); 1 Schoppen (Wein) = 1 Mäslein (Korn) = 32 C$''$ = $^{1}/_{2}{}'$; 1 Ohm = 20 Viertl à 4 Mas à 4 Schopp.; 1 Malter = 4 Simri à 4 Kumpf à 4 Gscheid à 4 Mäsl.; 1 Stecken Holz = 5 . 5 . 4 C$'$ Raum; 1 summar. Stecken = 70 C$'$ Masse; 1 Welle Reißholz 1$'$ Durchm. 5$'$ L. — **Holland:** metrisch mit holl. Namen; 1 El = 1^{m} à 10 Palm à 10 Duim à 10 Strup; 1 Roede = 10^{m}; 1 Myl = 1^{km}; 1 Kop = 1$'$; 1 Schepel = 10$'$; 1 Mud u. Zack = 1 Hectoliter; 1 Wisse od. Faden = 1 C^{m}; 1 Tonne = 2 Mud; 1 Last = 30 Mud; 1 Pond = 1^{kg} à 10 Oncen à 10 Lood. —

Italien (Neu-): metrisch.

Lübeck: 291^{mm} = 1$'$ à 12$''$; Elle = $255^{1}/_{4}$ par. $'''$; Ruthe 16$'$; 1 Stübch. (4 Quartier) = 3,6375$'$; 1 Oxhoft = $1^{1}/_{2}$ Ohm = 6 Anker à 5 Viertl à 2 Stübch. à 4 Quartier; 1 Schffl. = 34,694$'$; 96 Schffl. = 1 Last; 1 Forstfaden = 14 . 4 . 3 C$'$; 1 Ctr. = 112 Handelspfd. à 484,7^{g}. —

Mecklenburg-Schwerin: Längen meist preuß.; 1 Morg. = 100 Q.-Rth. = 25600 Q.$'$; Flüssigk. wie Hamburg; Trockenh. mannigfach; Rostocker Mas: 1 Schffl. = 38,89$'$; 1 Last = 8 Drömt = 96 Schffl. à 4 Faß od. Viertl, à 4 Spind od. Metzen; 1 Tonne = 4 Schffl. Dazu: 1 Tonne Land = 40000 □$'$ = 0,394^{ha} (1^{ha} = 2,538 To.).

Norwegen: wie Dänemark. —

Oestreich: 316,11^{mm} = 1$'$ à 12$''$; wien. Elle = 2,465$'$; Klftr. 6$'$ = 1,897^{m}; Ruthe 10$'$; Meile 24000$'$ = 7587^{m}; 1 Joch = 3 Metz. = 1600 Q.-Klftr. = 57600 Q.$'$; 1 Mas od. Kanne (à 4 Seidl) = 0,0448 C$'$ = 1,415$'$; 1 Eim. (Wein) = 41 Mas;

Mas, Gewicht und Geld.

1—5. Name, Bezeichnung, Grösse und Eintheilung.

1 Eim. Bier = $42\frac{1}{2}$ Mas; 1 Metz. = 1,947 C′ = 61,5045^l; 30 Metz. = 1 Muth; 1 Klftr. Holz = 6.6.3 C′; 1 wien. Pfd. = 560,012^g; 1 Centner = 5 Stein = 100 Pfd. à 32 Lth. à 4 Quent. [**Böhmen:** 296,40^{mm} = 1′; 16′ böhm. = 15′ wien.; 100 böhm. Ell. = 108 wien. Ell.; 1 Strich (Land) = $\frac{1}{2}$ Joch; 1 Strich (Korn) = 4 Viertel = 16 Mäsl. (à 12 Seidel) = 93,61^l; 1000 böhm. Strich = 1522 wien. Metzen; 1000 alte böhm. Pint = 1350 wien. Mas.] — **Oldenburg:** 295,88^{mm} = 1′ à 12″; Elle = $257\frac{1}{2}$ paris.‴; Ruthe 18 u. 20′; 1 Neu-Juck = 160 □-R. = 51840 Q.′ = 0,454^{ha} (1^{ha} = 2,204 J.); 1 Wein-Kanne = 1,369^l; 1 Oxhoft = $1\frac{1}{2}$ Ohm à 4 Anker à 26 Kann. od. 40 Quartier; 1 Bier-K. = 1,425^l; 1 Tonne = 112 Kann.; Getraide-Kanne = Bier-K.; 1 Last = 12 Malt. = 18 Tonn. à 8 Schffl. à 16 Kann.; 1 Ctr. = 100 Handelspfd. à 484,4^g. —

Polen: 288^{mm} = 1′ à 12″; Klftr. 6′; Ruthe 15′; 1 Morgen = 300 Q.-Rth. = 0,56^{ha}; 1 Quart = 1^l; 1 Faß od. Tonne = 5 Kann. à 4 Quart; 1 Schffl. = 128^l; 30 Schffl. = 1 Last. — **Portugal:** 329,13^{mm} = 1′ à 12″ (u. Metersystem). — **Preussen:** 313,85^{mm} = 1 rhein. Fuß à 12″; berlin. Elle = 25,5″; Faden 6′; Lachter 80″; Ruthe 12′ (3,766^m); Meile 24000′ od. 7532^m; 1 (Magdbg.) Morgen = 180 Q.-Rth. = 25920 Q.′; 1 Quart = 64 C″ = $\frac{1}{27}$ C′; 1 Fuder = 4 Oxhoft = 6 Ohm à 2 Eim. à 2 Anker; 1 Eim. = 60 Quart = $\frac{20}{9}$ C′ = 68,702^l; 1 Gebräude (Bier) = 9 Kufen à 2 Faß à 2 Tonn. à 100 Quart; 1 Schffl. = 16 Metz. = 3072 C″ od. $\frac{16}{9}$ C′ = 54,9615^l; 1 Metze = 3 Quart; 1 Last = $2\frac{1}{2}$ Wspl. à 2 Malter à 12 Schffl.; 1 Tonne (Kalk, Kohlen) = 4 Schffl.; 1 Klftr. (Holz, Steine, Torf) = 6.6.3 C′; 1 Schachtruthe = 144 od. 12.12.1 C′; Gewicht siehe sub **2.**

Russland: 304,79^{mm} = 1 (engl.) Fuß à 12″; $2\frac{1}{3}$′ = 1 Arschine = 16 Werschock = 0,711^m; 1 Sashen = 3 Arsch. = 7′ = 48 Werschock = 2,134^m; 1 Werst = 1500 Arsch. = 1067^m = 1,067 Kilometer; 1 Dessätine (Land) = 21600 Q.-Arsch. = 117600 Q.′; 1 Wedro = 10 Kruschka = 8 Stoof = 750,57 C″ = 12,299^l = Raum v. 30 Pfd. r. Wasser bei 15° R.; 40 Wedro = 1 Botschka (Tonne); 1 Tschertwert = 8 Tschertwerik à 1601,2 C″ od. 26,238^l od. Raum v. 64 Pfd. Wasser; 1 Faden Holz = 1 Cub.-Sashen = 7.7.7 C′ Raum; 1 Pfd. = 409,52^g; 1 Schiffspfd. = 10 Pud à 40 Pfd. à 32 Lth. à 3 Solotnik. —

Sächsische Gruppe. Königr. Sachsen (Dresden): 283,19^{mm} = 1′ à 12″; Lachter = 2^m; Klftr. 6′; Landruthe $15\frac{1}{8}$′ = 4,2950^m; Straßen- u. Bauruthe 16′; Meile 7500^m; leipzig-brab. Elle 685,6^{mm}; 1 Acker = 300 Q.-Rth. = $69008\frac{1}{3}$ Q.′; 1 Kanne = 2 alte Pfd. dest. Waff. bei 15° R. (= 1,868 neue Pfd.) = 71,186 C″ = 0,9356^l (Sehr nahe 1 C′ = $24\frac{3}{11}$ Ka.); 72 Ka. = 1 Eim.; 1 Gebräude Bier = 24 Faß à 4 Tonn. à 70 Visirkann. od. 105 Schenkkann. (im Handel 108); 1 Schffl. = 7900 C″ (nahe $\frac{32}{7}$ C′) od. 103,729^l; 1 Wspl. = 2 Malt. a 12 Schffl. à 4 Viertel à 4 Metz. à 4 Mäsch.; 1 Klftr. Holz = 6.6.3 C′ Raum; 1 Tonne Kohlen = 2 Schffl. = reichl. 9 C′; 1 Rth. Steine (gewöhnl.) = 16.16.3 C′ — **S.-Altenburg:** 283,79^{mm} = 1′ à 12″; Vermess.-Fuß = Elle = 2′; Rth. = 20′ = 10 Vermess.-Fuß; Acker = 200 Q.-Rth. = 80000 Q.′ = 0,644^{ha} (1^{ha} = 1,552^A); 1 Kanne = $1\frac{1}{6}$ Dresdn. Ka.; 1 Schffl. = 146,972^l. — **S.-Coburg:** 303,97^{mm} = 1′ à 12″; Rth. 14′; Vermess.-Fuß u. -Rth. = preuß.; (Feld-) Morgen 160 Q.-Rth. = 31360 Q.′; 1 Eim = 80 Mas = 77,345^l. — **S.-Gotha:** 287,62^{mm} = 1′ à 12″; Feldruthe 14′; Waldruthe 16′; Wald-Fuß 282,6^{mm}; Feld-Acker 140 Q.-Rth. = 27440 Q.′ = 0,227^{ha}; Wald-Acker = 160 Q.-Rth. = 40960 Q.′; 1 Eim. = 40 Ka. = 5285 C″ = 72,77^l; 1 Schffl. = 2 Vrtl. à 43,66^l. — **S.-Meiningen:** 283,15^{mm} = 1′ à 12″; Vermess.-Fuß u. Ruthe = preuß. — **S.-Weimar-Eisenach (u. Rudolstadt):** 281,98^{mm} = 1′ à 12″; Klftr. 6′; Rth. 16′; Acker 140 Q.-Rth. = 35840 Q.′ = 0,285^{ha} (1^{ha} = 3,509^A); Eimer = 80 Mas od. Kann. = 71,708^l; 1 Schffl. (= 84 Mas) 75,294^l. — **Schweden:** 296,9^{mm} = 1′ à (12 u.) 10″; Faden 6′; Rth. 16′; Meile 36000′; 1 Ref = 10 Stangen = 100′; 1 Tonne Land 56000 Q.′ = 5,6 Q.-Ref. = 0,4936^{ha} (1^{ha} = 2,026 To.); 1 Ohm od. Faß = 4 Anker = 60 Kannor (à 2 Stop à 4 Quart) = 6 C′; 1 Tonne Korn = 2 Span (à 4 Viertel à 4 Kappar) = 5,6 C′ (im Handel 6,3); 1 Fad. Holz = 144 C′; Gewicht v. 1864 an: 0,9094 alt. preuß. Pfd. = 1 Skälpfd. à 100 Ort à 100 Korn; 1 Last = 100 Ctr. à 100 Skälpfd. — **Schweiz:** siehe Baden; dazu 1 Stab = 2 Ell. = 4′ = 1,2^m; 1 Stunde = 16000′ = 4800^m = 4,8^{km}; Juchart = Baden'sch. Morg.; Ferner 1 Saum (= 3 Ctr.) = 4 Eim. = 100 Mas à 4 Schoppn; 1 Mas = $1\frac{1}{2}$′ = $\frac{1}{18}$ C′; 1 Malter od. Sack = 1 bad. Malter = 10 Viertl od. Sester = 10 Immi (od. Mas à $1\frac{1}{2}$^{l}) à 4 Vierling à 4 Mäslein. —

Mas, Gewicht und Geld.

1—5. Name, Bezeichnung, Grösse und Eintheilung.

Würtemberg: 286,49^{mm} = 1′ à 10″; Elle = 2,144′; Ruthe 10′ = 2,865^{m}; 1 Morgen = 384 □.-Rth = 38400 □′; 1 Helleich-Mas = 78$^{1}/_{8}$ C″; 1 Eimer = 293,93′ = 16 Immi à 10 Mas à 4 Schopp. od. Quart; 1 Fuder = 6 Eim.; 1 Schenkmas = $^{10}/_{11}$ Helleich-Mas, 1 Schffl. = 7537 C″ = 177,23′ = 8 Simri à 4 Vierling à 4 Mäslein à 2 Ecklein, 1 Klftr. od. Meß-Holz = 6.6.4 C′. (Altes Gewicht: 1 Ctr. = 104 Pfd. à 467,728^{g}.)

4. Geld- und Münzwesen.

4ᵃ Deutschland. **Münzverein:** 30 Vereinsthaler (à 30 Grosch.) = 45 östr. Guld. (à 100 Kreuzer) = 52$^{1}/_{2}$ süddeutsche Guld. (à 60 Krz.) = 1 neu. Pfd. fein Silber; geprägt mit 0,9 fein; daher 27 Thlr. in Courantsorten geprägt = 1 Pfd. = 500^{g}; Durchm. des Vereinsthlr. 33^{mm}, des Doppelthlr. 41^{mm}; Scheidemünze: 1 Pfd. fein Silber in 34$^{1}/_{2}$ Thlr od. 51$^{3}/_{4}$ östr. Guld. od. 60$^{3}/_{4}$ süddeutsche Gld.; 50 Kronen = 100 Halbkron. = 1 Pfd. f. Gold; geprägt in 0,9 fein; daher 45 Kron. = 1 Pfd. Aeltere deutsche Münzen: 1 alt. Thaler = $^{451}/_{450}$ neue Thlr.; 1 alt. östr. od. Conventions-Guld. = 1,05 neue Gld. = 105 neue Krz.; 1 alt. Zwanzigkrz. (lire austriace) = 55 neue Krz.; 3 alte Krz. = 5 neue Krz. = 1 Silber- od. Neu-Groschen. Oestr. Dukaten = 4$^{1}/_{2}$ östr. Gld. + 4 u. 5 % Aufgeld. Preuß. Friedrichsd'or à 5 Thlr. Gold od. (amtlich) 5$^{2}/_{3}$ Thlr. Silb.; 38$^{10}/_{13}$ Stück = 1 Mark fein; wonach 1 Pfd. Gold = 15$^{9}/_{13}$ Silb. = 470,8 Thlr. Silb., od. 1 Thlr. Gold = 1,133 Thlr. Silber. **Bremen:** 1 Thaler Gold = 72 Groten Gold, davon 66$^{1}/_{2}$ ca. 1 Thlr. Silb. — **Frankreich** (Belgien, Schweiz, Italien ꝛc.): 100 Frank (à 100 Cent od. Rappen) = 450^{g} fein Silb. + 50^{g} Kupf. = $^{1}/_{2}$ Kilogr. (1 Pfd.) Rauh-Gewicht (also 0,9 fein geprägt); 1 Napoleond'or = 20 Frank (Silberwähr), bisher so geprägt, daß 1 Pfd. Gold = 15$^{1}/_{2}$ Silb.; (1 Louisd'or = 1 Pistole = 5 Thlr. Gold mit 8–11 % Agio auf Silb. = 5,4 bis 5,6 deutsche Thaler). — **England:** (Gold) 1 Guinee = 1,05 Sovereign = eigentl. u. ursprüngl. Pound Sterling (= $^{20}/_{3}$ Silberthaler ca.) à 20 Schill. à 12 Pence. — **Schweden:** Neue Rixdaler à 100 Oere = $^{1}/_{4}$ Rixdaler Species = 48 Schilling (à 4 Stüber) = 11,45 deutsche Groschen.

Zur Vergleichung:

	Frank à 100 Cents	Pfd. Sterl. à 20 Schill.	Oestr. Guld. à 100 Kreuz.	Südd. Guld. à 60 Kreuz.	Hamburg. Mark Curr. à 16 Schill.	Hamburg. Mark Banko	Holl. Neugulden à 100 Cent.	Russ. Rubel à 100 Kopek.	Amer. Dollar à 100 Cent
4ᵇ. 1 Obiges hat deutsche Groschen:	8 Gr	ca. 200 Gr.	20 Gr.	17$^{1}/_{7}$ Gr.	12	15$^{1}/_{6}$	17 Gr.	32$^{1}/_{4}$ Gr.	42$^{6}/_{7}$ Gr. (1$^{3}/_{7}$ Thl.)
4ᶜ. 1 deutscher Thaler ist in Obigem =	3$^{3}/_{4}$ Frank	ca. $^{3}/_{20}$ Pfd. Strl.	1$^{1}/_{2}$ Guld.	1$^{3}/_{4}$ Guld.	2$^{1}/_{2}$ Mark	1,978 Mark	1,764 Guld.	0,929 Rubel.	0,7 Dollar.

1 deutsch. Groschen = 12$^{1}/_{2}$ franz. Centimes = 1$^{1}/_{8}$ engl. Penny. = 5 östr. Kreuz. = 3$^{1}/_{2}$ süddeutsch. Kreuz. = 1$^{1}/_{3}$ hamb. Schill. Curr. = 2,16 brem. Grote = 5,98 holl. Cent = 4,29 dän. Schill. = 4,19 schwed. Schill. = 3,09 russ. Kopeken.

5. Neudeutsches System nach den Projekten der Bundescommission von 1861 und 1865.

Nach Größe, Theilung u. Namen ganz dem metrischen gleich, vgl. sub 1. (Wobei zu kürzen: „Cent, Mill, Hecto u. Kilo" anstatt „Centimeter, Millimeter, Hectoliter, Kilogramm"). Daneben etwa noch ein Faden od. Lachter à 2^{m}, eine Ruthe à 5^{m}, eine Meile à 7500^{m}; u. (nur auf entschiedene preuß. Forderung) ein Fuß à 0,3^{m}, wonach dann der Zoll = 3 Cent u. die Linie = 3 Mill od. 3^{mm} sein würde. Ferner der Morgen = 100 □-Rth. = 2500 □^{m} = $^{1}/_{4}$^{ha}; das Joch = 200 □-Rth. = 5000 □^{m}, = $^{1}/_{2}$^{ha}. — Die Klafter (Holz ꝛc.) = 4 Cub^{m} à 100 Scheit; so daß beim Holz- u. Bauwesen künftig an die Stelle des Cubicfußes das Scheit treten würde, veranschaulicht durch ein Parallelepipedum von 1 Meter Länge u. 1 Decimeter Dicke u. Breite. — Gewichte: Pfund, Centner, Schiffslast wie sub 2.

Mas und Gewicht etc.

6–9. Zur Vergleichung und Verwandlung der Längen-, Quadrat- u. Cubicfusse und deren gleichgetheilte Ober- und Untermase.

	Frankreich. Neu Fr. [1]	Frankreich. Alt. Paris	England Russlnd.	Oestreich	Preussen [2]	Sachsen	Hannov.	Bayern	Würtembrg.	Baden. Schweiz	Hessen-Darmst.
	Meter	Fusse à 12 Zoll.						Fuss à 12 u. 10″	Fusse à 10 Zoll.		
	1m =	3,0784	3,2809	3,1631	3,1862	3,5312	3,4235	3,4263	3,4905	3 1/3	4
	0,32484	=1′=	1,066	1,028	1,035	1,147	1,112	1,113	1,134	1,083	1,299
	0,30479	0,9383	=1′=	0,964	0,971	1,076	1,043	1,044	1,064	1,016	1,219
	0,31611	0,9731	1,037	=1′=	1,007	1,116	1,082	1,083	1,103	1,054	1,264
6.	0,31385	0,9662	1,030	0,993	=1′=	1,108	1,074	1,075	1,096	1,046	1,255
	0,28319	0,8718	0,929	0,896	0,902	=1′=	0,970	0,970	0,988	0,944	1,133
	0,29209	0,8992	0,958	0,924	0,931	1,031	=1′=	1,001	1,020	0,974	1,168
	0,29186	0,8985	0,958	0,923	0,930	1,031	0,999	=1′=	1,018	0,973	1,167
	0,28649	0,8819	0,940	0,906	0,913	1,012	0,981	0,982	=1′=	0,955	1,146
	0,3	0,9235	0,984	0,949	0,956	1,059	1,027	1,028	1,047	=1′=	1,2
	1/4	0,7696	0,822	0,791	0,797	0,883	0,856	0,857	0,873	5/6	=1′
	□-Meter	Quadratfusse.									
	1 Qm =	9,4768	10,76	10,007	10,152	12,469	11,721	11,740	12,184	11 1/9	16
	0,1055	1 Q′	1,136	1,056	1,071	1,316	1,237	1,239	1,286	1,172	1,688
	0,0929	0,880	1 Q′	0,930	0,943	1,158	1,089	1,091	1,132	1,032	1,486
	0,0999	0,947	1,076	1 Q′	1,014	1,246	1,171	1,173	1,217	1,110	1,598
7.	0,0985	0,934	1,060	0,986	1 Q′	1,228	1,155	1,156	1,200	1,094	1,576
	0,0802	0,760	0,863	0,803	0,814	1 Q′	0,940	0,941	0,977	0,891	1,283
	0,0853	0,809	0,918	0,854	0,866	1,064	1 Q′	1,002	1,040	0,948	1,345
	0,0852	0,807	0,917	0,852	0,865	1,062	0,998	1 Q′	1,038	0,946	1,363
	0,0821	0,777	0,883	0,821	0,833	1,023	0,962	0,964	1 Q′	0,912	1,314
	0,09	0,853	0,969	0,901	0,914	1,122	1,055	1,057	1,097	1 Q′	1,440
	0,0625	0,592	0,673	0,625	0,634	0,779	0,732	0,734	0,761	0,694	=1 Q′
	Cub.-Met.	Cubicfusse.									
	1 Cm =	29,174	35,317	31,658	32,346	44,032	40,126	40,223	42,528	1000/27	64
	0,0343	1 C′	1,211	1,085	1,109	1,509	1,375	1,379	1,458	1,270	2,194
	0,0283	0,826	1 C′	0,896	0,916	1,247	1,136	1,139	1,204	1,049	1,812
	0,0316	0,921	1,116	1 C′	1,022	1,391	1,267	1,270	1,343	1,170	2,022
8.	0,0309	0,902	1,092	0,979	1 C′	1,361	1,241	1,244	1,315	1,145	1,979
	0,0227	0,663	0,802	0,719	0,735	1 C′	0,911	0,914	0,966	0,841	1,454
	0,0249	0,727	0,880	0,789	0,806	1,097	1 C′	1,002	1,060	0,923	1,595
	0,0249	0,725	0,878	0,787	0,804	1,095	0,998	1 C′	1,057	0,921	1,591
	0,0235	0,686	0,830	0,744	0,761	1,035	0,944	0,946	1 C′	0,871	1,505
	0,027	0,788	0,954	0,855	0,873	1,189	1,083	1,086	1,148	1 C′	1,728
	0,0156	0,456	0,552	0,495	0,505	0,688	0,627	0,628	0,664	0,579	=1 C′

[1] Zugleich für **Belgien, Holland, Italien** ꝛc. — [2] Auch **Dänemark** und **Norwegen.**

9. Zur Verwandlung preussr., östr. u. engl.-russr. Längen-, Quadr.- u. Cub.-Fusse, -Zolle, -Linien in's metrische und gegenseitige Mas.

Preuß.-Metrisch	Metr.-Preußisch	Preuß. - Englisch	Engl.-Preußisch	Oestr. - Metrisch	Metr.-Oestreich.
1′ =0,31385m 1″ =0,02615m 1‴ =0,00218m	1m =3,18620′ =3′2″2,8‴ =38,234″	1′ =1,02972′ =1′0″4,28‴ =12,3567″	1′ =0,97114′ =0′11″7,8‴ =11,6536″	1′ =0,31611m 1″ =0,02634m 1‴ =0,00222m	1m =3,16345′ =3′1″11,5‴ =37,961″
1Q′=0,0985Qm 1Q″=6,841Qcm	1Qm=10,1519Q′ =1461,9Q″	1Q′=1,0603Q′ =146,13Q″	1Q′=0,9431Q′ =129,98Q″	1Q′=0,0999Qm 1Q″=6,940Qcm	1Qm=10,007Q′ =1441,0Q″
1C′ =0,0310Cm 1C″=17,89Ccm	1Cm=32,3459C′ =55894C″	1C′=1,0918C′ =1886,7C″	1C′=0,9159C′ =1582,6C″	1C′ =0,0316Cm 1C″=18,28Ccm	1Cm=31,656C′ =54701,4C″

Oestr. - Englisch	Engl.- Oestreich.	Engl. - Metrisch	Metr. - Englisch
1′ =1,03713′ =1′0″5,35‴ =12,446″	1′ =0,96420′ =0′11″6,9‴ =11,5704″	1′ =0,304795m 1″ =0,025400m 1‴ =0,002117m	1m =3,28090′ =3′3″4,5‴ =39,371″
1Q′=1,0756Q′ =148,25Q″	1Q′=0,9297Q′ =128,13Q″	1Q′=0,09290Qm 1Q″=6,4514Qcm	1Qm=10,765Q′ =1550,1Q″
1C′=1,1156C′ =1927,7C″	1C′=0,8964C′ =1549,0C″	1C′=0,02832Cm 1C″=16,386Ccm	1Cm=35,317C′ =61027C″

Beispiele zu Taf. 6—8.

1. Die **Vergleichung** englr. Fuße od. Zolle gegen preuß. od sächsische gewährt Taf. 6 in Zeile 8 mit 1′ od. 1″ engl. = 0,971 preuß. od. 1,076 sächs. od. 100 engl. ca. = 97 preuß. od. 107 1/2 sächs. —
2. Das **Verhältniß** des engl. Fuß od. Zoll zum preuß. od. sächs. zeigt Taf. 6 in Spalte 8 als 1 zu 1,030 zu 0,929 oder ca. als 100 : 103 : 93 d. h gegen den engl. ist der preuß. größer um 3% u. der sächs. kleiner um 7%. —
3. Die **Verwandlung** engl. Fuße od. Zolle geschieht also laut Zeile 8 durch Multipl. mit 0,971; od. laut Spalte 8 durch Division mit 1,03 (= vorig. Faktors Reciproke).

Mas und Gewicht etc.

10—14. Zur Vergleichung und Verwandlung der Landflächen und deren Erträge od. Aufwand etc.

10. Feld- und Wald-Flächenmase und 11. Quadratmeilen;

auch derlei Er- u. Beträge, wenn das betr. Geld od. Gewicht od Hohlmas v. gleich. Grösse.

Frankreich Hectar 100m insQ. 10000 Q	England Acker 100 QRth 43560 Q′	Russland Dessät. 2400QSh. 117600 Q′	Oestreich Joch 1600Qklft 57600 Q′	Preussen Morg. 180 QRth 25920 Q′	Sachsen Acker 300 QRth 69008 Q′	Hannover Morg. 120 QRth 30720 Q′	Bayern Tagwk 400 QRth 40000 Q′	Würtemb Morg. 384 QRth 38400 Q′	Baden *) Morg. 400 QRth 40000 Q′	Hess.-D. Morg. 400 QRth 40000 Q′
$1^{ha}=$	2,471	0,915	1,737	3,917	1,807	3,815	2,935	3,173	25/9	4
0,4047	$=1^{A}=$	0,370	0,703	1,585	0,731	1,544	1,188	1,284	1,124	1,619
1,0925	2,700	$=1^{D}=$	1,898	4,279	1,974	4,168	3,206	3,466	3,035	4,370
0,5756	1,422	0,527	$=1^{J}=$	2,254	1,040	2,196	1,689	1,826	1,599	2,302
0,2553	0,631	0,234	0,444	$=1^{M}=$	0,461	0,974	0,749	0,810	0,709	1,021
0,5534	1,368	0,507	0,962	2,168	$=1^{A}=$	2,111	1,624	1,756	1,537	2,214
0,2621	0,648	0,240	0,455	1,027	0,474	$=1^{M}=$	0,769	0,832	0,728	1,048
0,3407	0,842	0,312	0,592	1,334	0,616	1,300	$=1^{T}=$	1,081	0,947	1,363
0,3152	0,779	0,288	0,548	1,234	0,569	1,202	0,925	$=1^{M}=$	0,875	1,261
0,36	0,890	0,330	0,626	1,410	0,650	1,374	0,057	1,142	$=1^{M}=$	1,44
1/4	0,618	0,229	0,434	0,979	0,452	0,954	0,734	0,798	0,694	$=1^{M}$

11. Die geograph. Quadratmeile enthält an obstehenden Masen (Hectar, Acker etc.):

5506 Hectar	13605 Acker	5038 Dessät.	9566 Joch	21564 Morg.	9949 Acker	21007 Morg.	16195 Tagwk	17469 Morg.	15294 Morg.	22024 Morg.

12. Waldflächen-Cubicfusse (u. -Klftrn.). Zur Verwandlung der Forsterträge etc.

Cubicmetr. pro Hectar	Engl. C′ pro Acker	Russ. C′ pro Dessät.	Oestr. C′ pro Joch	Preuss. C′ pro Morg.	Sächs. C′ pro Acker	Hann. C′ pro Morg.	Bayr. C′ pro Tagwk.	Würt. C′ pro Morg.	Bad. C′ *) pro Morg.	Hess D. C′ pro Morg.
$1\ C^{m}=$	14,292	38,582	18,221	8,2586	24,368	10,517	13,705	13,404	40/3	16
0,06997	=1C′=	2,700	1,275	0,578	1,705	0,736	0,959	0,938	0,933	1,120
0,02592	0,370	=1C′=	0,472	0,214	0,632	0,273	0,355	0,347	0,346	0,415
0,05488	0,784	2,117	=1C′=	0,453	1,337	0,577	0,752	0,736	0,732	0,878
0,12109	1,730	4,672	2,206	=1C′=	2,951	1,273	1,660	1,623	1,614	1,937
0,04104	0,586	1,583	0,748	0,339	=1C′=	0,432	0,562	0,550	0,547	0,657
0,09508	1,359	3,669	1,733	0,785	2,317	=1C =	1,303	1,275	1,268	1,521
0,07296	1,043	2,815	1,330	0,603	1,778	0,767	=1C′=	0,978	0,973	1,167
0,07461	1,066	2,879	1,359	0,616	1,818	0,785	1,023	=1C′=	0,995	1,194
0,075	1,072	2,894	1,367	0,619	1,828	0,789	1,028	1,005	=1C′=	1,2
0,00625	0,893	2,411	1,139	0,516	1,523	0,657	0,857	0,838	5/6	=1C′

13. Fortsetzung.

	Hess.-C. pro Acker	Weimar pro Acker	Mckl.Sw. pro W.-Mg.	Brnschw. pro W.-Mg.	S.Altenb. pro Acker	S.-Gotha pro W.-Ack	Schwed. pro Tonne	Norweg. pro Tonne	Dänemk. pro Tonne
a) Gleichungstafel.	Landübliche Cubicfusse.								
$1\ C^{m}$ pr. Hectar =	10,02 =	12,71 =	9,21 =	14,35 =	28,23 =	15,03 =	18,86 =	12,75 =	17,84
1 östr. C′ p. Joch =	0,549	0,698	0,506	1,788	1,550	0,825	1,035	0,700	0,979
1 prss. C′ p. Mrg. =	1,212	1,539	1,117	1,738	3,421	1,820	2,284	1,544	2,161
b) Verhältnißtafel.	Je 1 landübl. Cubicfuss pro obige landübl. Flächeneinheit ist eben soviel als:								
Cub^{m} pr. Hect. :	0,100 :	0,079 :	0,109 :	0,070 :	0,035 :	0,067 :	0,053 :	0,078 :	0,056
östr. C′ pr. Joch :	1,821 :	1,434 :	1,975 :	1,269 :	0,645 :	1,212 :	0,966 :	1,432 :	1,022
prss. C′ pr. Mrg. :	0,825 :	0,650 :	0,895 :	0,575 :	0,222 :	0,549 :	0,438 :	0,648 :	0,463

14. Landflächen-Gewicht. — Zur Verwandlung entsprechender Feld- u. Forst — Er- u. Beträge.

Frankreich pro Hectar	England pro Acker	Russland pro Dessät	Oestreich pro Joch		Sachsen pro Acker	Hannover pro Morg.	Bayern pro Tagwk.	Würtemb pro Morg.	Baden *) pro Morg.	Hess.-D. pro Morg.
14a. Wenn auf 1 preussischen Morgen 1 deutsch. Pfund kommt, so kommt auf 1 Obstehendes an landüblichem Gewicht wie folgt:										
1,958 Kilogr.	1,747 engl. Pfd.	5,224 russ. Pfd.	2 1/80 wien. Pfd	Gleichungszeile	2,320 deut. Pfd	1,097 deut. Pfd	1,191 bair. Pfd.	1,320 deut. Pfd	1,477 deut. Pfd	0,979 deut. Pfd.
14b. Wenn auf obige Flächeneinheit 1 vorstehende landübl. Gewichtseinheit kommt, so kommen auf 1 preussischen Morgen folgende deutsche Pfunde:										
0,511 deut. Pfd.	0,572 deut. Pfd.	$0,191_{5}$ deut. Pfd	0,497 deut. Pfd	Verhältnißzeile.	0,431 deut. Pfd	0,912 deut. Pfd	0,839 deut. Pfd	0,758 deut. Pfd	0,677 deut. Pfd	1,021 deut. Pfd.

*) Baden zugleich auch für die **Schweiz** (Juchart). — **Beispiele:** s. folg. Seiten.

Mas und Gewicht etc.

15—18. Landflächen-, Flüssigkeits- und Trocken-Hohlmase.

15. Landflächen-Hohlmas. — Zur Verwandlung entsprechender Feld-u. Forst-Er-u.-Beträge.

Frankreich pro Hectar	England pro Acker	Russland pro Dessät.	Oestreich pro Joch		Sachsen pro Acker	Hannover pro Morg.	Bayern pro Tagwk.	Würtemb pro Morg.	Baden *) pro Morg.	Hess.-D. pro Morg.
15a. Wenn auf 1 preuss. Morgen 1 preuss. Scheffel kommt, so kommt auf 1 obstehende Flächeneinheit an landüblichem Hohlmas wie folgt:										
2,153 Hectoliter	2,397 Bushel	1,120 Tschtwrt	2,014 W.Metz	Gleichungszeile	1,148 s. Schffl.	1,811 h. Himt.	0,330 bair.Sch.	0,383 wrt.Sch.	0,517 bad.Mltr	0,420 hes.Mltr.
15b. Wenn auf obige Flächeneinheit 1 vorstehend landübl. Hohlmas kommt, so kommen auf 1 preuss. Morgen folgende preuss. Scheffel:										
0,464 prss Schfl.	0,417 prss Sch.	0,892 prs. Sch.	0,496 prs. Sch.	Verhältnißzeile	0,871 prs. Sch.	0,552 prs. Sch.	3,032 prs. Sch.	2,612 prs. Sch.	1,936 prs. Sch.	2,378 prs Sch.

16. Zur Verwandlung und Vergleichung der Flüssigkeits-Hohlmase und deren gleichgetheilte Ober- und Untermase. (Liter, Quart, Kannen etc.)

Frankr. Liter 0,001 Cm	England Gallon 277,271 C″	Russland Krschk. 75,06 C″	Oestreich wi.Mas 0,0448 C′	Preussen Quart 1/27 C′	Sachsen Kanne 71,186 C″	Hannover Quarti. 67,5 C″	Bayern Mas-K. 0,043 C′	Würtemb Hell-M. 78 1/8 C′	Baden *) Mas 1/18 C′	Hess.-D. Mas 0,002 Cm
1^{L} =	2,220	0,814	0,707	0,873	1,068	1,027	0,935	0,544	2/3	1/2
4,543	= 1^{G} =	3,697	3,211	3,968	4,851	4,667	4,250	2,473	3,029	2,272
1,230	0,270	= 1^{K} =	0,868	1,073	1,312	1,262	1,150	0,669	0,819	0,615
1,415	0,311	1,151	= 1^{M} =	1,236	1,511	1,454	1,324	0,770	0,943	0,708
1,145	0,252	0,932	0,809	= 1^{Q} =	1,223	1,176	1,071	0,623	0,763	0,572
0,936	0,206	0,762	0,662	0,818	= 1^{K} =	0,962	0,876	0,510	0,624	0,468
0,973	0,214	0,792	0,688	0,850	1,040	= 1^{Q} =	0,911	0,530	0,649	0,481
1,069	0,235	0,870	0,755	0,934	1,141	0,275	= 1^{M} =	0,582	0,713	0,534
1,837	0,404	1,494	1,298	1,604	1,963	1,887	1,718	= 1^{hM}	1,225	0,918
1,5	0,330	1,220	1,060	1,310	1,602	1,541	1,403	0,817	= 1^{M} =	3/4
2	0,440	1,626	1,413	1,747	2,138	2,054	1,871	1,089	1 1/3	= 1^{M}

17. Ein landüblicher C′ enthält von obiger Maseinheit theils genau (theils nahe):

1 Cm = 1000 L										
	6,23	(23)	(22,3)	27	(24 3/11)	25,6	(23¼)	(22,1)	18	13½

Die Umkehr dieser Zahlen gibt der betr. Mase Cub.′-Größe; z. B.: 1 Quart = 1/27 C′.

18. Zur Verwandlung und Vergleichung der Trocken-Hohlmase und deren gleichgetheilte Ober- und Untermase. (Hectoliter, Scheffel etc.)

Frankr. Hectolit 0,1 Cubm	England Bushel 8 Gallon	Russland Tstwrk. 25/27	Oestreich wi.Metz 1,947 C′	Preussen Schfl. 3072 C″	Sachsen Schfl. 7900 C″	Hannover Himten 1 1/4 C′	Bayern Schfl. 8,944 C′	Würtemb Schfl. 7537 C″	Baden *) Malter 50/9 C′	Hess.-D. Malter 8,192 C′
1^{hl} =	2,751	3,814	1.626	1,819	0,963	3,210	0,450	0,564	2/3	25/32
0,363	= 1^{B} =	1,386	0,591	0,661	0,350	1,167	0,163	0,205	0,242	0,284
0,262	0,721	= 1^{T} =	0,426	0,477	0,253	0,842	0,118	0,148	0,175	0,205
0,615	1,692	2,346	= 1^{M} =	1,119	0,592	1,974	0,277	0,347	0,410	0,480
0,550	1,512	2,096	0,894	= 1^{S} =	0,529	1,764	0,247	0,310	0,366	0,429
1,038	2,857	3,960	1,688	1,889	= 1^{S} =	3,333	0,467	0,586	0,692	0,811
0,312	0,857	1,188	0,506	0,567	0,300	= 1^{H} =	0,140	0,176	0,208	0,243
0,224	6,118	8,481	3,615	4,046	2,142	7,138	= 1^{S} =	1,255	1,482	1,737
1,772	4,876	6,760	2,882	3,225	1,707	5,689	0,797	= 1^{S} =	1,182	1,385
1,5	4,127	5,721	2,439	2,729	1,445	4,815	0,675	0,846	= 1^{M} =	1,172
1,28	3,522	4,882	2,081	2,329	1,233	4,109	0,576	0,722	0,853	= 1^{M}

19. Ein landüblicher C′ enthält von obiger Maseinheit theils genau (theils nahe):

1 Cm = 10 hl										
	(0,78)	1,08	20/39	9/16	(7/32)	0,8	(1/9)	(2/15)	(0,18)	0,123

Die Umkehr dieser Zahlen gibt der betr. Mase Cub.′-Größe; z. B.: 1 prß Schfl. = 16/9 C′

Beispiele zu 15. Ein Ertrag von 100 preuß. Scheffel pro Morgen in Oestreich und Sachsen? = 201,4 Metz. pro Joch = 114,8 sächs. Schffl. pro Acker. Also auch für's Uebersetz. aus dem Sächs. in's Oestr: nahe 115 sächs. = 201 östr. od. 1 sächs. Schffl p. Ack. = 1,74 od. 1 3/4 wien. Metz. p. Joch. — — 100 östr. Metzen p. Joch in's Preuß.? Laut 15b. = 49,6 preuß. Schffl. p. Morg. Bei gleichen Ertragsziffern in Frankreich u England verhalten sich die betr. Ertragskräfte laut 15b wie 464 : 417.

*) Die Spalte Baden gilt zugleich für die **Schweiz** (nach Juchart, Mas u. Malter).

Mas und Gewicht etc.

20—24. Gewichte; Hohlmas- und Cubicfuss-Gewicht.

20. Zur Vergleichung und Verwandlung der Gewichte (Kilogramm u. Pfunde) und deren gleichgetheilte Centner, Lothe etc.

Frankreich Kilogrm. 1 Lit. Wssr.	Alt. Paris Pfund	England Av. Pfund (112=1 Ct.)	Russland Handl Pfd. (40=1 Pud)	Oestreich Wien. Pfd. (100=1 Ct.)	Deutschland Neu. Pfd. (100=1 Ct.)	Preussen etc. Alt. Pfd. (110=1Ct.)	Schweden Schal. Pfd (120=1 Ct.)
1Kg =	2,0429	2,2050	2,4419	1,7857	2	2,1381	2,3511
0,48951	= **1** =	1,079	1,195	0,874	0,979	1,047	1,151
0,45359	0,927	= **1** =	1,108	0,810	0,907	0,970	1,066
0,40952	0,837	0,903	= **1** =	0,731	0,819	0,876	0,963
0,56001	1,144	1,235	1,367	= **1** =	1,120	1,197	1,317
1/2	1,021	1,102	1,221	0,893	= **1** =	1,069	1,176
0,46771	0,955	1,031	1,142	0,835	0,935	= **1** =	1,100
0,42534	0,869	0,938	1,039	0,760	0,851	0,909	= **1**
Belgien, Holland, Italien, Dänemark etc.				Bayern.	Alt. Pfd. in Sachs., Hannov. etc.		

21. Speciell für's alte preussische etc. u. neudeutsche Gewicht (s. sub 2 u. 5).

Neues in altes:	Altes in neues:
1 neu. Ctr. = 0,971851 alt. Ctr.	1 alt. Ctr. = 1,028964 neu. Ctr.
1 = Pfd. = 1,069036 = Pfd.	1 = Pfd. = 0,935422 = Pfd.
= 1 Pfd. 2 Lt. 0,84 Qt. alt. G.	= 28 Lt. 0 Qt. 6 C. $2^2/_3$ Korn.
1 neu. Lth. = 1,140305 alt. Lth.	1 alt. Lth. = 0,876958 neu. Lth.
1 = Qt. = 0,456122 = Qt.	1 = Qt. = 2,192395 = Qt.

22—23. Zur Vergleichung und Verwandlung von Hohlmas-Gewicht und Cubicfuss-Gewicht und entsprechenden Feld- u. Forst-Er.-u. Beträgen.

22a. Wenn auf 1 preuss. Scheffel 1 deut. Pfund kommt, so kommen auf folgendes Hohlmas: folgende landübliche Pfunde:

Frankr.	England	Russland	Oestreich	Preussen	Sachsen	Hannover	Bayern	Würtemb	Baden *)	Hess.-D.
Hectol.	Bushel	Tschtw	Metzen	Scheffel	Schfl.	Himtn.	Schfl.	Schfl.	Malter	Malter
0,910 Kilogr.	0,729 Av, Pfd.	4,663 russ. Pfd.	0,999 östr. Pfd.	Gleichungszeile	2,020 deut. Pfd	0,606 deut. Pfd	3,612 bair. Pfd.	3,447 deut. Pfd	2,729 deut. Pfd	2,329 deut. Pfd

22b. Wenn auf 1 obstehendes Hohlmas 1 landübliches Pfund kommt, so kommt auf 1 preuss. Scheffel an deutschen Pfunden:

Frankr.	England	Russland	Oestreich	Preussen	Sachsen	Hannover	Bayern	Würtemb	Baden *)	Hess.-D.
10,992 deut. Pfd.	1,372 deut. Pfd.	0,214 deut. Pfd	1,001 deut. Pfd	Verhältnißzeile	0,495 deut. Pfd	1,650 deut. Pfd	0,277 deut. Pfd	0,290 deut. Pfd	0,366 deut. Pfd	0,429 deut. Pfd

23a. Wenn auf 1 preuss. Cubicfuss 1 deut. Pfund kommt, so kommt auf 1 landübl. Cubicfuss folgendes landübliche Gewicht:

Frankr.	England	Russland	Oestreich	Preussen	Sachsen	Hannover	Bayern	Würtemb	Baden *)	Hess.-D.
(pro Cm) 16,173 Kilogr.	1,010 engl. Pfd.	1,118 russ. Pfd.	0,912 östr. Pfd.	Gleichungszeile	0,786 deut. Pfd	0,862 deut. Pfd	0,718 bair. Pfd.	0,813 deut. Pfd	0,873 deut Pfd	0,505 deut. Pfd

23b. Wenn auf 1 obstehenden Cubicfuss (u. C) 1 landübl. Pfund (resp. Kilogr.) kommt, so kommt auf 1 preuss. Cubicfuss an deutschen Pfunden:

Frankr.	England	Russland	Oestreich	Preussen	Sachsen	Hannover	Bayern	Würtemb	Baden *)	Hess.-D.
0,618 deut. Pfd.	0,993 deut. Pfd.	0,894 deut. Pfd	1,096 deut. Pfd	Verhältnißzeile	1,272 deut. Pfd	1,160 deut. Pfd	1,393 deut. Pfd	1,230 deut. Pfd	1,145 deut. Pfd	1,979 deut. Pfd

24. Meterkilogramm u. Fusspfund.

{In der Mechanik: 1 Pferdskraft (richtiger: sekundliche Arbeit eines Pferdes bei voller Verwendung seiner Kraft) = 75 Meterkilogr. (75*mk*), d. i. 75*k* auf 1*m* hoch gehob.; ca. = 480 preuss. Fusspfund (480 Fp.)

	England	Russland	Oestreich	Preussen	Sachsen	Hannov.	Bayern	Würtemb	Baden *)	Hess.-D.
1 Mtr^{kg} =	7,23 Fp.	8,02 Fp.	5,66 Fp.	6,37 Fp.	7,06 Fp.	6,85 Fp.	6,12 Fp.	6,98 Fp.	$6^2/_3$ Fp.	8 Fp
1 Pfrdkr. =	**543** =	**601** =	**424** =	**478** =	**530** =	**514** =	**459** =	**524** =	**500** =	**600** =

Beispiele zu 22 u. 23. Wenn in Preußen der Scheffel 100 Pfd. wiegt, so wiegt in Oestreich die Metze? Laut 22a... 99,9 östreich. Pfd. — Wenn in Oestreich die Metze 100 östr. Pfd. wiegt, so wiegt in Preußen der Schffl. laut 22b 100,1 preuß. Pfd.; u. in Sachsen? (da laut 22a... 999 in Oestreich = 2020 in Sachsen, also 1 in Oestreich = 2,092 in Sachsen) = 209,2 sächs. Pfd. p. sächs. Schffl. — — Wenn der preuß C' Holz 50 preuß. Pfd. wiegt, so wiegt der bair.? laut 23a... 0,718 . 50 = 35,9 bair. Pfd. — Wenn eine Holzart in Oestreich u. Baiern gleichschwer sein soll, so muß sich deren landübl. Cubicfuß-Gewicht verhalten laut 23b... wie 1096 zu 1393 od. 1 zu 1,27.

*) Die Spalte Baden gilt zugleich auch für die **Schweiz.**

Gewichte.

25. Specifisch-Gewicht der technisch u. wirthschaftlich wichtigsten Stoffe.

25a. Specif.-Gewicht von Derbmassen (Wasser = 1).

Alabaster 2,70. Alaun 1,75. Alaunschiefer 2,34-2,59. Anthracit 1,4-1,5. Antimon 6,70. Arsenik 5,63-5,96. Asbest 2,10-2,80. Asfalt 1,07 bis 1,16. — — Basalt 2,72-2,86. Bausteine im Mittel 2,5. Bernstein 1,07. Bimstein 0,91-1,65. Blei: deutsch 11,33-11,45; engl. 11,6. Bleiglätte 9,3 bis 9,4. Bleiglanz 7,4-7,6. Bolus 1,97. Borax 1,72. Braunkohle 1,2-1,4. Braunstein 3,72. Butter 0,94. — — Cautschuk 0,93. — — Eis 0,92. Eisen: gegoss. 7,0-7,5; gehämm. 7,6-7,8; gezog. 7,6-7,75. Elfenbein 1,80 bis 1,92. Erde: mager u. trock. bis schwer u. frisch 1,36-2,4. — — Feldspath 2,28. Feldstein drchschnittl. 2,5. Fett 0,92-0,94. Feuerstein 2,6. — — Galmei 3,38. Gelberde 2,24. Glas: Fenster-Gl. 2,64; Krystall-Gl. 2,89; Flint.-Gl. 3,2-3,8. Glockenmetall 8,81. Gneis 2,4-2,7. Gold: gedieg. 14-19; gegoss. 19-25; gehämm. 19,5; Ducaten-G. 19,35; von engl. Guineen 17,6; franz. 22 karat. 17,5. Granat: gemeine 3,7; edle 4,0. Granit 2,5-3,1. Graphit 1,8-2,3. Gummi arabic. 1,45. Gyps: ungebrannt 1,9-2,2; gebrannt 1,81; gegossen 0,97. — — Hölzer*): Nadelholz naß 0,90; grün 0,83; lufttrock. 0,60; dürr 0,48. (Pappel dürr 0,40.) Hartholz: naß bis 1,10; grün 0,95-1,0; lfttrock. 0,75-0,82; dürr 0,66-0,74. Fremde Hölzer trock. (dürr?): Buchsbaum 0,91-1,03. Campesche 0,91. Ebenholz 1,21. Guajak 1,33. Kork 0,24. Mahagoni 0,56-1,06. Harz: v. Ficht. 1,07. Holzkohle: weich 0,28 bis 0,40, hart 0,47; v. Eiche 0,57. Kalk ungebr. 2,46-2,84; gebr. 1,2-1,5. Kalkmörtl trock. 1,64, frisch 1,86. Kieselstein 2,3-2,7. Knochen von Ochsen 1,66. Koak 0,4. Kochsalz 2,10-2,17. Kreide 1,8-2,66. Kupfer gegoss. 8,6-8,9; gehämm. od. gezog. 8,8-9,0. Kupferkies 4,16; Kupferglanz 5,69; K.-Erz (rothes) 5,85. — — Lava 2,76. Lehm mager u. trock. bis fett u. frisch 1,52-2,85. — — Marmor 2,52-2,85. Mauerwerk v. Bruchst. trock. 2,40, frisch 2,46; v. Sandst. trock. 2,05, frisch 2,12; v. Ziegel trock. 1,47, frisch 1,70. Mergel erdig u. trock. bis hart u. frisch 2,40-2,60. Messing gegoss. 8,4 bis 8,7; gewalzt 8,5-8,6; gezog. 8,4-8,7. Mühlstein-Quarz 1,3-2,6. — — Pech 1,15; weiß 1,07. Platin 20,9-22,1. Porphyr 2,4-2,8. Porzellan 2,4 bis 2,5; P.-Erde 1,15. — — Quarz 2,3 bis 2,7. Quecksilber 13,6-14,0. — — Rothgüldenerz 5,62. — — Salpeter 1,93. Sand grob bis fein: trock. 1,37 bis 1,64; frisch 1,90-1,95. Sandstein 1,9-2,7. Schiefer 2,64-2,67. Schwarzgüldenerz 6,08. Schwefel: ged. 2,08; geschmolz. 1,99. Schwefelkies 4,75. Schwerspath 4,54. Serpentin 2,55. Silber: gegoss. 10,10-10,47; gehämm. 10,51-10,62. Stahl: Cement-St. 7,3-7,8; Frisch-St. 7,5-7,8; Guß-St. 7,8-7,9. Steinkohle 1,2-1,5 (Pechkohle 1,32; Cannelkohle 1,24). Steinsalz 2,28. — — Talkerde 2,35. Thon 1,80-2,63. Thonschiefer 2,8-2,9. Torf trock.: locker, hell 0,15; mittel 0,3-0,6; alt, erdig 0,5-0,9; alter Pechtorf 0,7-1,1. — — Wachs 0,97. Weißgüldenerz 5,32. Wißmuth gegoss. 9,83. Wolfram 7,60. — — Ziegel 1,4-2,2; als Klinker 1,5-2,3. Zink: gegoss. 6,86-7,22; gewalzt 7,19-7,86. Zinn 7,29-7,47. Zinnober 8,09. Zucker 1,6. — —

*) Für die einzelnen Holzarten 2c. in verschiedenen Zuständen und Sortimenten siehe die Haupttafel **11** in Forstl. Hülfsbuchs I. Abth.

25b. Specif.-Gew. v. geschichtet. Mass. incl. Zwischenräum. (Wass. = 1).

Coaks blasig, klar od. grob 0,55. — — Erbsen u. Linsen 0,70-0,81. — — Gras u. Grünfutter 0,44-0,50. Gerste 0,40-0,70. — — Hafer 0,36-0,49. Heu vom lockerst. bis dichtest. 0,07-0,12. — — Kartoffeln 0,65-0,70. Kleie v. Rogg. 0,32. — — Mehl 1,50-1,56. Mist locker bis fett 0,70-0,90. — — Raps 0,55-0,60. Roggen: Sommer- 0,61-0,75; Winter- 0,66-0,80. Rüben 0,50 bis 0,53. — — Sand s. oben. Steinkohle in klein. Stück. 0,85-0,95; in grob. Stück. 0,90-1,05. Stroh locker bis ganz dicht 0,05-0,12. — — Weizen, Sommer- 0,66-0,78; Winter- 0,70-0,81. Wicken 0,67-0,77. — —

25c. Specif.-Gew. v. Flüssigkeiten, wo nichts bemerkt bei mittl. Temp. (18—20° C; Wasser = 1.)

Aether b. 20° C. 0,716. Alkohol absol. b. 20° C. 0,792. — Bier 1,023 bis 1,034. — Kochsalzlauge bei 18° C. gesätt. 1,208. — Milch 1,02-1,04. — Oele: Oliv. 0,92; Rüb. 0,913; Lein. 0,84. — Quecksilber bei 0° 13,55 bis 13,58. — Säuren: Salpeter-S. 1,52; Salz-S. 1,19; engl. Schwefel-S. 1,84; nordhäus. Schwefel-S. 1,90. Seewasser 1,02-1,04. — Weine: geistige 0,99-1,00; süße 1,02-1,04. —

Gase, s. folgende Seite.

Gewichte.

25—27. Specifisch-Gewicht, Cubicfuss-Wassergewicht, Absolut-Gewicht.

25ᵈ· Specif.-Gewicht der Gase. (**Athmosphär. Luft = 1**; bei 10° R. od. 12,5° C. = 0,0012323 des Wassergewichts; bei 0° nahe = $^1/_{770}$ des Wassergewichts.)

Alkoholdampf 1,613. — **Kohlenoxyd** 0,941. **Kohlensäure** 1,524. **Kohlenwasserstoff**, ölbildend 0,985; =grubengas 0,559. — **Quecksilberdampf** 6,98-7,03. — **Sauerstoff** 1,103. **Stickstoff** 0,976. **Steinkohlenleuchtgas** 0,4-0,6. — **Wasserdampf** bei 100° C. 0,624. **Wasserstoff** 0,069. —

26. Cubicfuss-Wassergewicht in landüblichen Pfunden.
Cubicmetergewicht bei grösst. Dichtigkeit des Wassers od. bei 3° R. = **1000** Kilogr.; bei mittl. Temp. od. 15° R. = **992**^{k}, also fast 1 % leichter.

1 Cubicfuss:	England	Russland	Oestreich	Preussen	Sachsen	Hannov.	Bayern	Würtemb	Bad.(Swz.)	Hess.-D.
bei 3° R. =	62,42	69,14	56,41	61,832	45,42	49,84	44,40	50,28	54	31¼
„ 15° „ =	**62,33**	**68,56**	**56,32**	**61,738**	**45,35**	**49,76**	**44,33**	**50,20**	**53,6**	**31,2**
	Av. Pfd.	russ. Pfd.	östr. Pfd.	deut. Pfd.	deut. Pfd	deut. Pfd	bair. Pfd.	deut. Pfd	deut. Pfd.	dt. Pfd.

27. Absolut-Gewicht der sub 25 aufgeführt. Stoffe. { Nebst Beziehungen zwischen Volumen und Gewicht.

Wenn **v** das Volumen eines Körpers nach Cub′ od. Cub^m bedeutet, **s** dessen Specifischgewicht, **a** sein Absolutgewicht u. **w** das Wassergewicht p. C′ od. C^m (aus 26), so gilt:

A. Zunächst für feste und flüssige Stoffe:

27ᵃ· Cubicmetergewicht in Kilogramm. = Specifischgewicht × 1000 Kilogramm; d. h.: Rücke in den Werthen der Tabelle 25ᵃ· bis 25ᶜ· das Komma um drei Stellen rechts.

27ᵇ· Cubicfussgewicht nach landübl. Pfunden = Specifischgewicht × Wassergew.; d. h.: Multiplicire die entsprech. Zahl aus Tab. 25ᵃ·ᵇ·ᶜ· mit der aus Tab. 26.

27ᶜ· Hohlmasgewicht nach (Kilogr. resp.) landübl. Pfunden: Dividire das vorige Produkt (27ᵃ· resp. 27ᵇ·) durch die entsprechende Zahl der Tabelle 17 resp. 19.

27ᵈ· Ueberhaupt, wenn **v** (Cub^m od. C′) das Volumen eines Körpers bedeutet, **s** sein Specifischgewicht, **a** sein Absolutgewicht (in Kilogr. resp. landübl. Pfunden) und **w** das Wassergewicht aus Tab. 26, so gilt:
(1) $a = s.\,w.\,v$; (2) $v = \frac{a}{s.\,w}$; (3) $s = \frac{a}{w.\,v}$ } wonach sich 1. das Absolutgewicht **a** aus dem Volumen **v**; 2. das Volumen **v** aus dem Gewicht **a** und 3. das Specifischgewicht **s** aus dem Volum und dessen Gewicht berechnen läßt.

B. Für die sub 25ᵈ· aufgeführten Gase und Zahlen hat man beim Gebrauch vorstehender Regeln (27ᵃ· bis 27ᵈ·) das **w** (aus Tab. 26) noch mit 0,00123 zu multipliciren, oder allenfalls auch mit 770 zu dividiren.

Beispiele zu Tafel 25 bis 27.

1. Das Cubicmeter frisches Nadelholz wiegt? . . . Aus 25ᵃ· folgt durch 3stelliges Rechtsrücken des Komma's: 830 Kilogramm od. 1660 deutsche Pfunde.

2. Das Fuder frischer Sand zu 40 preuß. Cubicfuß wiegt? . . . Da dessen **s** lt. Tab. 25ᵃ· = 1,9 u. das **w** lt. Tab. 26 = 61,7; so folgt $a = s.\,w.\,v = 1{,}9 \times 61{,}7 \times 40$ = 4689 Pfund od. ca. 47 Ctr.

3. Der sächs. Scheffel Steinkohlen wiegt durchschnittlich? . . . Da dessen **v** laut Tab. 19 = $^{32}/_7$ C′, dessen **s** laut Tab. 25ᵇ· = 0,95 u. das **w** laut Tab. 26 = 45,35, so folgt $a = 0{,}95 \times 45{,}35 \times {}^{32}/_7$ = 197 Pfund od. fast 2 Ctr.

4. Wieviel pflegt der preuß. Scheffel besten Winterroggens zu wiegen? Da **v** laut Tab. 19 = $^{16}/_9$ C′, **s** laut Tab. 25ᵇ· = 0,80 u. **w** laut Tab. 26 = 61,7 C′, so folgt $a = {}^{16}/_9 \,.\, 0{,}80 \,.\, 61{,}7$ = 87 Pfund.

5. Welchen Rauminhalt (Volum v) nach C^m nimmt, als feste Masse gedacht od. ohne Schichtungszwischenräume, 1) 1 Ctr. (=50^k) Steinkohle u. 2) 1 Ctr. lufttrock. Nadelholz ein? . . . Nach $v = \frac{a}{s.\,w}$ folgt aus 25ᵃ· u. 26:

1) $v = \frac{50}{1{,}35\,.\,1000} = \frac{1}{27}$ od. 0,037 Cub^m; und für

2) $v = \frac{50}{0{,}60\,.\,1000} = \frac{1}{12} = 0{,}083$ Cub^m.

6. Wenn eine Partie grünes Nadelholz 750 preuß. Pfund wog, so ist im Mittel dessen Massengröße nach preuß. Cubicfußen?

Nach $v = \frac{a}{s.\,w}$ folgt aus Tab. 25ᵃ· u. 26 . . $v = \frac{750}{0{,}83\,.\,61{,}7} = 14{,}6$ Cbfß.

Gewichte.

28—30. Absolut-Gewicht gewisser Hölzer u. Metalle etc.

28. Mittel-Gew. der deutschen Forst- u. Feldhölzer, im wesentlichen nach König.

Im frischen Zustande u. mit Rinde gemessen. (Ergänzung zur Haupttafel No. 11.)
Zunächst pro preuss. Cubicfuss und nach deutschen Pfunden.*)

	Eiche	Weiß-Buche	Roth-Buche	Ahrn. Eiche	Ulme	Birk.	Erle	Lind.	Aspe	Papp Weid.	Tann.	Fichte	Kiefer	Lärch.
	Derbholz. Pfunde. (Wasser = 61,7 Pfd.)													
grün . . .	64	61	60	58	57	54	51	49	47	47	51	49	53	51
antrocken	55	54	52	50	50	47	43	41	39	39	43	41	45	43
lufttrocken	47	47	44	43	42	39	34	38	32	31	36	33	36	35
dürr . . .	38	39	36	35	34	32	26	25	24	23	28	25	28	27
	Reisholz. Pfunde. (Wasser = 61,7 Pfd.)													
grün . . .	56	54	53	50	50	48	44	42	41	40	55	56	53	54
lufttrock. .	37	37	36	34	34	31	26	25	24	23	31	32	29	30

29. Mittel-Gewicht bautechnischer Materialien.

Zunächst pro preuss. Cubicfuss und nach deutschen Pfunden.*)

29a. **Metalle.** Blei 706 Pfd.; Eisen: Guß-Eisen 448 Pfd., Stab-Eisen 481 Pfd.; Kupfer 538 Pfd.; Messing 529 Pfd.; Zink 424 Pfd.; Zinn 450 Pfd. — (Quecksilber 854 Pfd.; Silber 646 Pfd.; Gold 1201 Pfd.)

29b. **Insgemein.** Nadelholz: naß 52 Pfd., trocken 28 Pfd., Hartes Laubholz: naß 69 Pfd., trocken 41 Pfd. — Mauerwerk: von Bruchstein 148 Pfd., von Sandstein 126 Pfd., von Ziegel 94 Pfd. — Wasser: destillirt 61,74 Pfd., See-Wasser 631/3 Pfd., Wasserdampf 0,053 Pfd.

30. Zur Gewichtsberechng. v. Metallplatten u. Langeisen zunächst nach deutschen Pfunden.

30a. **Platten od. Bloche** für je 1 □' preuß. (Für die andern Länder der Duodezzolle bleiben die unten sub *) befindl. Uebersetzungsregeln dieselben.)

Für je **1"** Dicke: Schmiedeisen 40,04 Pfd.; Gußeisen 33,27 Pfd.; Kupfer 45,65 Pfd.; Messing 44,06 Pfd.; Zink 35,27 Pfd.

" " **1/16"** " Schmiedeisen 2,50 Pfd.; Gußeisen 2,33 Pfd.; Kupfer 2,85 Pfd.; Messing 2,75 Pfd.; Zink 2,20 Pfd.

30b. **Für Band- u. Stab-Eisen.** (Zunächst im preuß. Mas; zum Uebersetzen der Gewichtszeile 1) in ein anderes Duodez-Zoll-System bleiben die unten sub *) stehenden Regeln in Kraft. Die Zeile 2) ist die Reciproke der Zeile 1.) —

Für einen Querschnitt von je	1/16 □"	1/8 □"	1/4 □"	1/2 □"	1 □"
1) Gewicht von 1' Länge:	0,21 Pfd.	0,42 Pfd.	0,83 Pfd.	1,66 Pfd.	3,33 Pfd.
2) Länge pro 1 Pfd. Gewicht:	4,80 Fß.	2,40 Fß.	1,20 Fß.	0,60 Fß.	0,30 Fß.

30c. **Für Rundeisen.** (Zunächst im preuß. Mas; zum Uebersetzen der Gewichtszeile 1) in ein anderes Duodez-Zoll-System bleiben die unten sub *) stehend. Regeln in Kraft. Die Zeile 2) ist die Reciproke der Zeile 1.) —

Durchmesser	1/4"	3/8"	1/2"	5/8"	3/4"
1) Gewicht pro 1' Länge:	0,164 Pfd.	0,368 Pfd.	0,655 Pfd.	1,023 Pfd.	1,474
2) Länge p. 1 Pfd. Gew.:	6,10 Fß.	2,72 Fß.	1,53 Fß.	0,98 Fß.	0,68
Durchmesser	7/8"	1"	11/4"	11/2"	13/4
1) Gewicht pro 1' Länge:	2,006 Pfd.	2,62 Pfd.	4,09 Pfd.	5,90 Pfd.	8,02
2) Länge p. 1 Pfd. Gew.:	0,50 Fß.	0,382 Fß.	0,244 Fß.	0,202 Fß.	0,145

Durchmesser	2"	21/4"	21/2"	23/4"	3"	31/4"
1) Gewicht pr. 1' Länge:	10,48 Pfd.	13,27 Pfd.	16,38 Pfd.	19,82 Pfd.	23,59 Pfd.	27,69 Pfd.
2) Länge p. 1 Pfd. Gew.:	0,095 Fß.	0,075 Fß.	0,061 Fß.	0,051 Fß.	0,042 Fß.	0,036 Fß.
Durchmesser	31/2"	33/4"	4"	41/2"	5"	6"
1) Gewicht pr. 1' Länge:	32,10 Pfd.	36,85 Pfd.	41,93 Pfd.	53,07 Pfd.	65,52 Pfd.	94,36 Pfd.
2) Länge p. 1 Pfd. Gew.:	0,031 Fß.	0,027 Fß.	0,024 Fß.	0,019 Fß.	0,015 Fß.	0,0106 Fß.

*) In gleich. Pfunden od. Halbkilogrammen wiegt das Cubicmeter nahe das 321/3fache; der östr. C' mehr 2%; der bair. u. hanov. = prß. × 0,8; der sächs. u. würtembg.'sche weniger 1/4 (74 resp. 76 %); der bad. od. schweiz. 87 %, der hess.-d. = 1/2 prß.; der russ. od. engl. weniger 8% (od. nahe 0,9 prß.); Und in östr. Pfunden der östr. C' 9% weniger als die prß. Zahl od. ca. 0,9 prß.

Zur Einführung des metrischen Mases
in's deutsche Forst- u. Bauwesen, besonders in Absicht auf Kubirung.

Bekanntlich ist	Engl.Russ.	Oestreich	Preussen	Hannover	Sachsen	Bayern	Würtbg.	Baden u. Schweiz
	in seitherigen Fussen:					in seitherigen Fussen:		
1 Meter od. „Stab“ =	3,2809	3,1634	3,1862	3,4325	3,5312	3,4263	3,4905	3 1/3 od. 10/3
	in Duodecimalzollen:					in Decimalzollen:		
	39,371	37,961	38,234	41,082	42,374	34,263	34,905	33 1/3 od. 100/3
1 Decimeter =	3,9371	3,7961	3,8234	4,1082	4,2374	3,4263	3,4905	3 1/3
1 Centimeter od. „Neuzoll“ also circa	0,394	0,380	0,382	0,411	0,424	0,343	0,349	1/3
1 alt. Zoll in Centi^{m} =	$2{,}54^{cm}$	$2{,}63^{cm}$	$2{,}62^{cm}$	$2{,}43^{cm}$	$2{,}36^{cm}$	$2{,}92^{cm}$	$2{,}86^{cm}$	3^{cm}

1 Millimeter od. „Strich“ sonach durchschnittl. = $^1/_{25}$ alte Duodez." od. $^1/_{30}$ alte Dez."
Und: 1 Dekameter od. Kette = 10 Meter = ca. 32 bis 35 alte Fuß;
1 Kilometer = 1000 Meter = $^2/_{15}$ Meile à 7500 Meter;

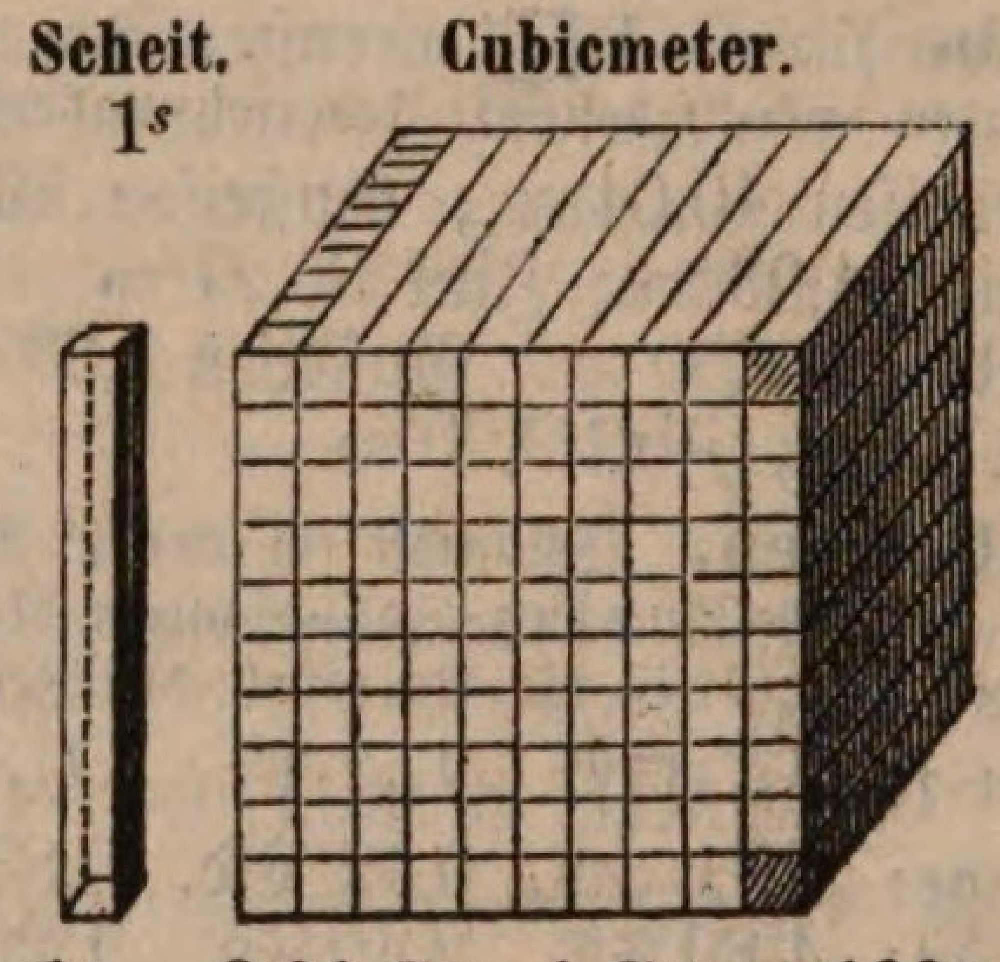
	Engl.Russ.	Oestreich	Preussen	Hannover	Sachsen	Bayern	Würtbg.	Baden u. Schweiz
	in Quadratfussen:							
1 Quadratmet. =	10,760	10,007	10,152	11,721	12,469	11,740	12,184	11 1/9 od. 100/9
	in Cubicfussen:							
1 Cubicmeter od. Stèr =	35,317	31,658	32,346	40,126	44,032	40,223	42,528	37 1/27 = 1000/27

Man schreibe abgekürzt:

1 Meter = 1^m; 1 Decimeter = 1^{dm}; 1 Centimeter = 1^{cm}; 1 Millimeter = 1^{mm}; 1 Quadratm. = 1 Q^m; 1 Quadratdecim. = 1 Q^{dm}; 1 Quadratcentim. = Q^{cm}; 1 Cubicmeter = 1 C^m; 1 Cubicdecimeter = 1 C^{dm}; 1 Cubiccentimeter = C^{cm}; das C^{dm} ist zugleich das Liter, = 1^l; der Stellvertreter von Kanne, Quart, Mas 2c.

Das Cubicmeter und das Scheit.

Es ist somit das C^m durchschnittl. nahe 40 mal so groß als der alte C'. Theilt man aber das C^m, wie beistehende Figur zeigt, in 100 (metr.) Scheite, à 1^{dm} dick u. breit oder à 1 Q^{dm} Stirnfläche u. 1^m Länge, so erhält man damit eine sehr anschauliche kubische Einheit in der Form eines 1^m langen Prisma, dessen Stirnfläche = $^1/_{100}$ des Q^m und dessen Volumen oder Rauminhalt = $^1/_{100}$ des C^m od. = 10 an- od. aufeinander gestelltn. würflförmign. Litern. Und wie 1^{cm} oder Neuzoll ca. = $^2/_5$ eines alten Zolles, so ist ein derlei Scheit (1^s) auch durchschnittlich ca. = $^2/_5$ eines alten Cubicfußes und bildet somit gegenüber dem verfeinerten (neuen) Zoll eine angemessen verfeinerte Raumeinheit umsomehr, als auch die neue Normalklafter, d. i. das C^m, nahe = $^2/_5$ der alten. —



$1^s = 0{,}01\ C^m$; $1\ C^m = 100^s$

Mag nun auch für die forst- u. bauwirthschaftlichen Kubirungen immerhin das Cubicmeter als die Haupteinheit gelten, insbesondre für's Summarische: so empfiehlt es sich doch ungemein, für's Einzelne das Hundertstel desselben in der eben so anschaulichen als praktischen Gestalt u. Größe des nurgedachten (metrischen) **Scheits** zu wählen: dafern wir nicht in unsern desfallsigen Berechnungstafeln u. Wirthschaftsbüchern einen mehr u. minder großen Wust beschwerlicher Nullen unnütz mit herumschleppen wollen; „unnütz“ weil es, um die nach Scheiten abgelesenen und summirten Massen in Cubicmeter zu übersetzen, nur eines zweistellig. Linksrücken des Komma bedarf.

Werden, wie es künftig mehr u. mehr geschehen wird, die Stämme, Klötzer, Klaftern, Reisigbunde 2c. nach ganzen Metern abgelängt, so fügt sich derlei Sortimenten das metr. Scheit ganz besonders glatt u. anschaulich ein. Eine Partie meterlange Spaltscheite od. Knüppel, aufgeklaftert zu 1^m breit u. hoch, d. i. als C^m, würden somit darstellen ein Holzquantum v. 100 (metrischen) **Raumscheiten**; bei (wie gewöhnl.) ca. 20 % Zwischenraum also ein Quantum v. 80 **Massenscheiten**.

Und wenn aus diesen u. obigen Gründen das Forst- u. Bauwesen seine Spezialkubirungen od. seine Einzelmassen zunächst nach derlei „Scheiten“ beziffert, hat es bei dieser eben so zweckmäsigen als einfachen Modifikation das Metersystem immerhin direkt u. aufrichtig adoptirt.

Zu Supplement I u. III von Verfasser's

Forstlichem Hülfsbuch u. dessen beiden Abzweigungen Holzcubirer u. Forsttaxator.

Allgem. Divisions- u. Kreisflächen-Tafel

für Divisoren u. Quotienten einer- und Durchmesser u. Kreisflächen anderseits bis zur fünften resp. vierten geltenden Ziffer und somit vier bis fünf Bogen gewöhnlicher Buchdrucker-Tabellen ersetzend.

(A. Erläuterungen u. Beisp. **zur Divisionstafel**: siehe folgende Seite.)

B. Erläuterungen u. Beisp. **zur Kreistafel** für's decimalgetheilte Mas.

NB. Wer Rundstärken aus dem Umfange, also mit Band od. Kette misst, handelt laienhaft u. unpraktisch, wenn er diese Instrumente nicht auf die direkte Durchmesserablesung einrichtet. Wenn 7 Theile od. Glieder = 11 Zoll od. Cent, so geben erstere genau genug den Durchmesser zunächst in Halbzollen od. Halbcentimetern.

§ 1. Erste Anwendung. Zum gegebenen Durchmesser die Kreisfläche!

1. Für Durchm. **von 0 bis 10.** Regel: Im D das Komma um 1 Stelle rechts und dann im F um 2 Stellen links. — Z. B. Die F zum D = 1,135 Zoll od. Cent od. Fuss od. Meter? Antw.: Das D = 11,35 zeigt auf ein F = 101,2; sonach das gefragte F = 1,012 □" od. $□^c$ od. $□^m$. — Die F zum D = 9,981"? Antw.: D = 99,81 zeigt auf F = 7824; gesuchtes F also = 78,24 □".

2. Für Durchm. **von 10 bis 100.** Regel: Einfache Ablesung! — Z. B. Die F zum D = $90{,}15^c$? Antw.: 6383 □" od. 0,6383 $□^m$. — Und die F zum D = 99,99? Antw. = 7853.

3. Für Durchm. **unter 0 u. über 100.** Multiplicire od. dividire das D mit 2 od. 3 od. 5 od. 10 etc. und behandle das darnach gefundene F umgekehrt mit dem Quadrate dieser Zahlen, also mit 4, 9, 25 (= $^{100}/_4$), 100 etc. Auch: rücke das Komma im D um **n** Stellen und dann im gefundenen F entgegengesetzt um 2 **n** Stellen. — Z. B. Die F zum D = $0{,}0374^m$? Antw.: Da zum 3stellig rechtsgerücktem Komma d. i. zum D = 37,4 die F = 1099, so folgt durch 6stelliges Linksrücken F = 0,001099 $□^m$ od. 10,99 $□^c$. — Die F zum D = $186{,}4^m$? Antw.: Da zum halben D = 93,2 die F = 6822 so folgt die gesuchte F = 6822 × 4 = 27288 $□^m$. Oder: Da zum D = 18,64 die F = 273 knapp, so folgt zum D = 186,4 die F = 27300 knapp. — Zum Durchm. = $921{,}3^m$ die Kreisfläche in runden Zahlen bis zur vierten Ziffer genau anzugeben! Auflös.: Da zum D = 92,13 die F = 6666, so folgt zum 10 × so grossem D die 100 × mal so grosse F = 666600 $□^m$.

§ 2. Zweite Anwendung. Zur gegebenen Kreisfläche den Durchmesser!

Regel: Nach Vorigem selbstverständlich! — Wenn also F unter 80 oder über 7854, so multiplicire resp. dividire die gegebene F mit den Quadratzahlen 4 od. 9 od. 25 (= $^{100}/_4$) od. 100 etc. u. behandele das sonach gefundene D umgekehrt mit den entspr. Wurzeln 2 resp. 3, 5, 10 etc. Auch: Rücke im gegebenen F das Komma um 2 **n** Stellen links od. rechts und im dazu abgelesenen D um **n** Stellen in umgekehrter Richtung. — Z. B. Zu einem Stamme von 67,75 □" Grundfläche die entsprechende Grundstärke abzulesen! Auflös.: Da zum F = 6775 das D = 92,88 knapp od. = 92,875, so folgt das gesuchte D = 9,2875 (wobei die 5 allerdings nicht ganz sicher sein kann).

C. Zur Anwendung **der Kreistafel auf's duodezimal**-getheilte Mas.

§ 3. Dritte Anwendung. Zum Duodezzoll-D die F nach □-Fussen anzugeben. Regel: Suche F nach § 1 u. dividire mit 144; oder fast eben so genau: multiplicire jenes F nach 3stelligem Linksrücken des Komma mit 7 u. mindere das Produkt um knapp 1%. Z. B. Zum D = 17,45 Duodez." die F in □'? . . . = 239,2 □" = 0,2392

$$\begin{array}{rl} & 0{,}2392 \\ \hline & 1{,}674 \;(7 \\ \text{minus} & 16 \\ \hline & 1{,}66\ □' \end{array} \qquad \text{Genauer} = \frac{239{,}2}{144} = 1{,}6597.$$

§ 4. Vierte Anwendung. Zur Quadratfuss-F den D nach Duodezzollen anzugeben! — Regel: Suche D nach § 2 u. multiplicire ihn mit 12, Z. B. Zur F = 1,662 den D in Duod."! . . . Da zu F = 166,2 das D = 14,55! folgt gesuchtes D = 1,455 . 12 = 17,46".

Reciprokentafel

zur theilweisen

Ersparung der Divisionsarbeit.

---

§ 1. Der reciproke d. i. umgekehrte Werth von 1175 ist $= \frac{1}{1175} = 0{,}0008511$, und von $1{,}175 = \frac{1}{1{,}175} = 0{,}8511$ und umgekehrt $\frac{1}{0{,}0008511} = 1175$, so wie $\frac{1}{0{,}8511} = 1{,}175$.

Die geltenden Ziffern dieser Quotienten oder Decimalbrüche lassen sich mit Einem Blicke aus nebenstehender Tabelle ablesen. Man werfe diesen Blick beispielsweise auf jene 117_5 oder auf 851_1, um sofort zu erkennen, **welche ausserordentliche Hülfe dieses eigenthümliche Täfelchen dem praktischen Rechner** in allen jenen Fällen zu gewähren vermag, wobei Divisionen in 1 od. auch in andere runde und kurze Zahlenwerthe vorkommen; indem man letztern Falles z. B. setzt $\frac{9}{11{,}75} = \frac{1}{11{,}75} \times 9$, was laut Reciprokentafel $= 0{,}0851 \times 9 = 0{,}7659$; oder aber durchs sogenannte Aufheben obigen Bruchs $\frac{9}{11{,}75} = \frac{1}{1{,}3056}$, laut Reciprokentafel (bei 130_{56}) $= 0{,}766$, schärfer 0,766 knapp oder 0,7659.

§ 2. Jede zwei Spalten dieses Täfelchens bilden also ein Zusammengehöriges, die linke läuft und liest man von oben nach unten, die rechte von unten nach oben. Als Eingang dienen zunächst die drei ersten Stellen des Divisors und zwar ohne Rücksicht auf Komma. Das **Einsetzen des Komma**'s dann in oder vor die abgelesenen Quotientenzziffern geschieht nach der einfachen Regel: So viele Ganzestellen die Zahl (der Divisor), so viele Anfangsnullen die Reciproke (der Quotient); und so viele Anfangsnullen jene, so viele Ganzestellen diese.

§ 3. Beispiele.

1) Laut metrolog. Kapitel in V.'s polytechnischer Brieftasche enthält ein russ. Kbfss. 1,08 Tschertwerik, also ist 1 Tschrtw. kubisch wie gross? $= \frac{1}{1{,}08}$ C'; mit einem Blick auf $108 = 0{,}926$ Cfs. —

2) Laut ebendaselbst: Wenn auf 1 preuss. Morgen 1 preuss. Scheffel kommt, so kommen auf das

	a) franz. Hectar	b) östr. Joch	c) bair. Tagwerk	d) russ. Dessatine
an landesübl. Hohlmas	2,1535	2,0145	0,3299	1,1204
	Hectoliter	wien. Metz.	bair. Scheff.	Tschetwert.

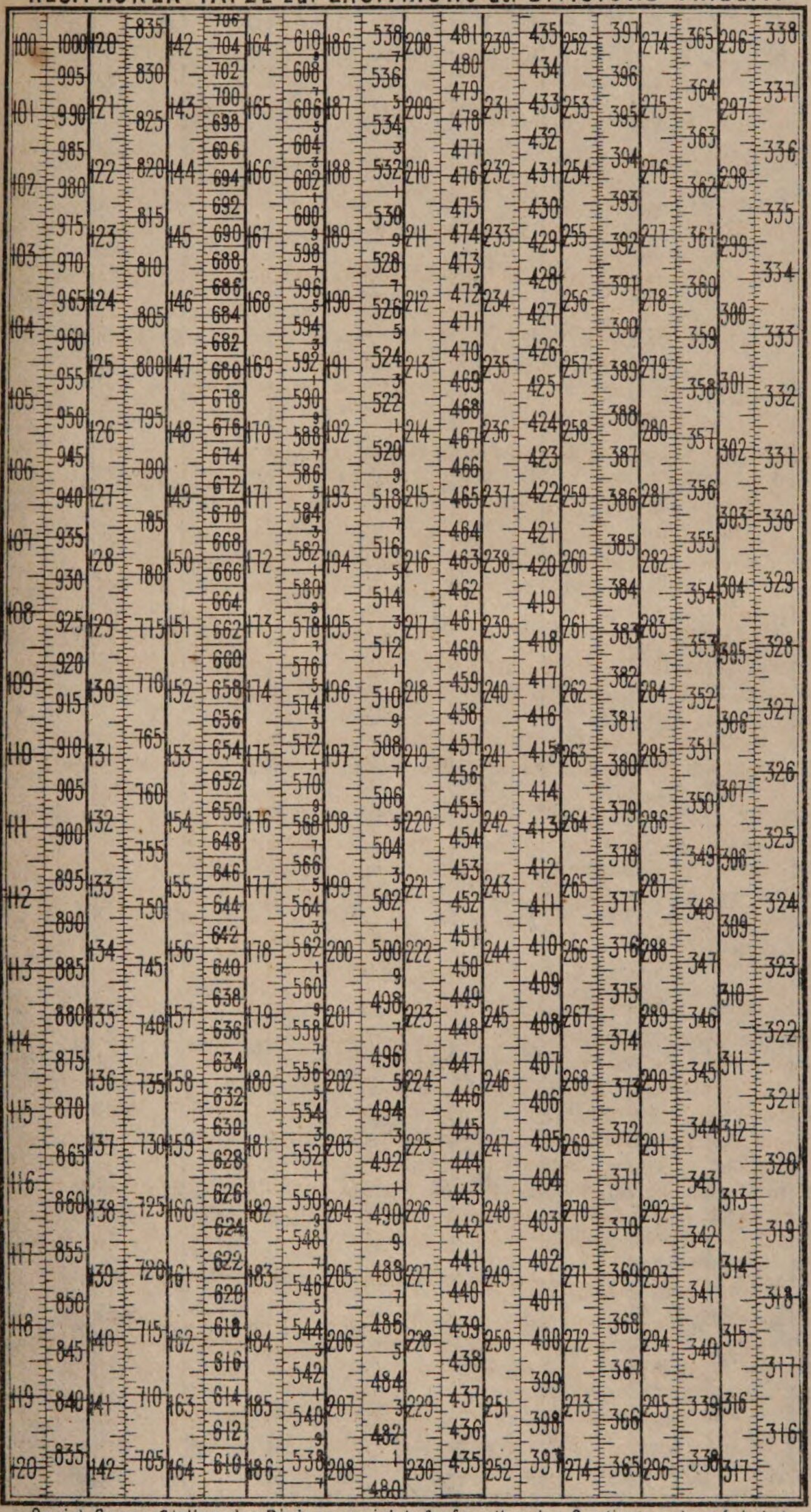
Man soll diese Tabelle umkehren, d. h. man soll angeben, wieviel preussische Scheffel auf den preuss. Morgen kommen, wenn a) 1 Hectoliter pro Hectar, b) wenn 1 wien. Metz. pro Joch etc. entfällt. — Diese ganze Rechnung ist mit vier einfachen Blicken und zwar auf die entsprechenden Striche oder Stellen 215_{3_5}, 201_{4_5}, 329_9 und 112_{0_4} abgemacht, diese besagen: a) 0,464, b) 0,496, c) 3,031 und d) 0,892 prss. Schffl. pro prss. Morgen; od. feiner abgelesen: a) 0,4643, b) 0,4963, c) 3,0312 u. d) 0,8925.

§ 4. Inwiefern man durch Verbindung mit vorstehender Multiplikationstafel auch Divisionen in grössere Zahlen ohne alle Rechnung mit vielfach ausreichender Näherung ausführen könne, möge das Aufsuchen des Quotienten von $\frac{275}{12{,}48}$ beweisen, der als $\frac{1}{12{,}48} \times 275$ laut Reciprokentafel $= 0{,}08013 \times 275$ und laut Spalte 27_5 der Multiplicationstafel und Zeile $80\frac{1}{8}$ die Ziffern 2204 und somit den Werth 22,04 gibt (indem $0{,}08013 \times 275$ auch $= 8{,}013 \times 2{,}75$; wonach die Ganzen zwischen 8×2 und 8×3 liegen müssen).

☞ **Um aber die Vortheile so flotten und bequemen Dividirens** (und wäre es auch nur zur flüchtigen Gegenprobe der Ziffern anderweiter gewöhnlicher Divisionsresultate) voll zu geniessen, unterlasse man nicht, sein zur Ablesung einer derartigen Linientabelle wahrscheinlich noch ungewohntes Auge vorher ein wenig darin einzuüben und besonders auch darüber zu orientiren, dass und wo die Zahleneingänge 100 bis 316 in den linken und 316 bis 399 in den rechten Spalten zu suchen sind.

AUS PRESSLER'S INGENIEUR-MESSKNECHT VERGRÖSSERTE

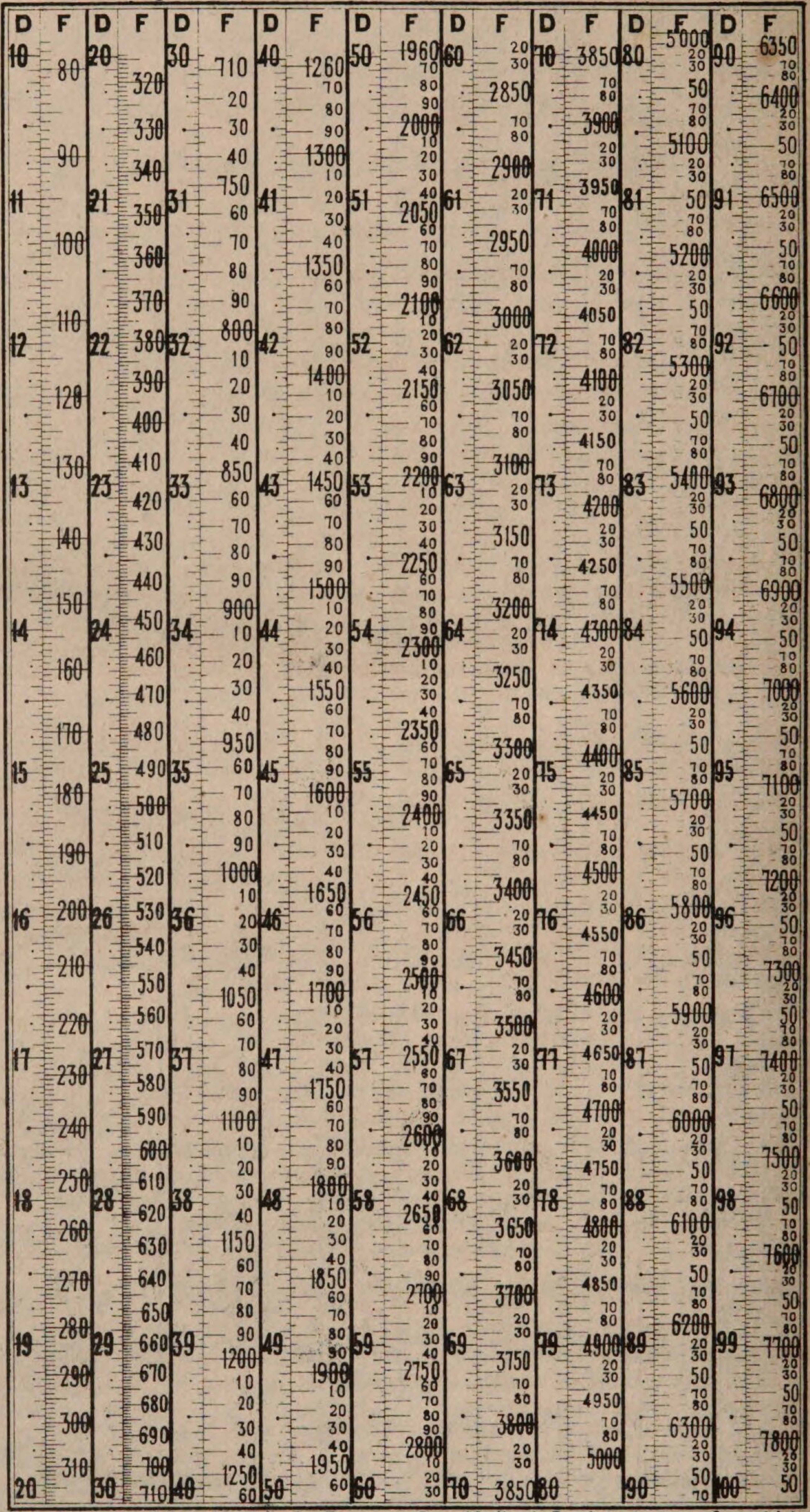
RECIPROKEN-TAFEL zur ERSPARUNG der DIVISIONS-ARBEIT.



Soviel Ganze-Stellen der Divisor, soviel Anfangsnullen der Quotient; und umgekehrt.
Z.B. 1:11,8 = 0,08475; 1: 0,0118 = 84,75; 1:8,35 = 0,11977; 1:0,3161 = 3,1635.

AUS PRESSLER'S **INGENIEUR-MESSKNECHT** VERGRÖSSERTE

allgemeine **KREISTAFEL** f. Drchm. u. Fläche.



Wenn D unter 10 od. über 100: rücke das Komma im D um 1 Stelle u. im F entgegengesetzt um 2; u. umgekehrt.

Wenn D in Duod." gegeben und F in □' gefragt: multipl. F mit 0,007 und mindre um 1 Procent.

[Zu Prof. Pressler's „MATHEMATISCHES ASCHENBRÖDEL" anstatt Prospectus]

Ueber die

humanistische und wirthschaftliche

Bedeutung, Stellung und Cultur

der

PRACTISCHEN MATHEMATIK

in

Schule und Leben.

Ein Auszug aus der Einleitung

zur **dritten Auflage** der

mathematischen und polytechnischen oder Messknechts-Brieftasche

von

M. R. Pressler,

Prof. a. d. Akademie Tharand, Kgl. Sächs. Hofrath, etc.

Allen Männern der Erziehung u. insbesondere den Herren Lehrern der Mathematik

ZUR PRÜFUNG

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

„Nach diesen Andeutungen, welche bisher mehr nur die technische und wirthschaftliche oder so zu sagen praktische Seite des Werkchens berührten, erübrigt mir noch, über dessen anderweiten Hauptzweck, d. h. seine wesentlich pädagogische Bestimmung und Benutzung, einige Erläuterungen zu geben. Und möchte ich dieselben nicht blos von meinen Specialkollegen (den mathematischen Pädagogen), sondern von Schulmännern aller Art (die der Gymnasien und humanistischen Realschulen ganz vorzugsweise mit inbegriffen) eingehend erwogen und dann, soweit sie es verdienen, auch praktisch beachtet sehen.

Es geschieht auf Grund von mehr als dreißigjähriger Erfahrung innerhalb einer ziemlich mannichfach geartet gewesenen Lehrerpraxis, wenn ich zu behaupten wage: 1) daß, um in unsern Schulen den Geist einer möglichst gediegenen und lebenspraktischen Wissenschaftlichkeit und Intelligenz zu entwickeln, wir rücksichts der Pflege der Mathematik und besonders rücksichts ihrer Verbindung mit Natur und Leben des Guten kaum zu viel thun können, oder mindestens Erhebliches mehr thun müssen als auf den meisten, namentlich auf vielen Gymnasial- und Realschulen bisher geschah oder geschehen konnte; sowie 2) daß ganz besonders gerade hierzu diese Meßknechtsbrieftasche einen beachtenswerth vielseitigen und wirksamen Uebungs- und Erziehungsapparat abzugeben im Stande sei.

Bei Beurtheilung dieses Ausspruchs müssen die Freunde einer wissenschaftlich wie sittlich und lebenspraktisch möglichst gediegenen und somit in Wahrheit echt humanistischen Bildung bedenken, daß die schulgerechte Erziehung hierzu — und zwar sowohl in Rücksicht auf deren materiale (nützliches Wissen bezweckende) als deren formale (die intellectuelle und ethische oder Geistes-, Gemüths- und Karakterbildung umfassende) Seite — sich nothwendig aus und auf vier Hauptfundamenten aufzubauen hat: den philologischen und historischen Disciplinen einer- und den mathematischen und physischen andererseits; von denen bekanntlich ein etwas einseitiger Sprachgebrauch die letztern beiden als die „realen" Lehrzweige den andern als den ausschließlich „idealen" (oder aber „humanistischen")

*

gegenüber zu stellen pflegt; obgleich diese (aus einem mit der Entstehung der „Realschulen" ursachlich und historisch zusammenfallenden Jugendfehler pädagogischer Wissenschaft herstammende) Gewohnheit immer noch weit weniger einseitig und irrthümlich ist als die, welche für jene „idealen" Lehr- und Wissenszweige zugleich das ausschließliche Prädicat der „Humaniora" in absoluter Weise heut noch aufrecht erhalten möchte. Denn es ist nicht eben schwer nachzuweisen, wie jeder einzelne jener vier Unterrichtsstämme ein ganz wesentliches Gebiet menschwürdiger Kenntnisse und Geisteskräfte entwickelt, das von den andern drei mehr oder weniger unbebaut gelassen werden muß; und wie demgemäs alle vier einander sowohl in Absicht auf die materialen als (was für uns die Hauptsache ist) auch formalen Zwecke der allgemeinen Erziehung wohlthätig und nothwendig ergänzen, und wie somit bei erheblicher Vernachlässigung des einen oder andern eine echt humanistische Bildung schlechterdings nicht möglich ist; auch dann nicht, wenn bewiesen werden könnte, daß die mathematischen und physischen Wissenschaften gegenüber den sprachlichen und geschichtlichen in Bezug auf ideale Bildungskraft in der That ziemlich unbedeutend wären.

Doch ist das keineswegs der Fall. (Vgl. V.'s „Normalgymnasium" in „Deutschlands Schulreform". Leipzig. Wiegand, 1859.) Vielmehr hat jeder mit christlich-philosophischem Geiste nur halbwegs begabte und demgemäs wirkende Reallehrer die mannigfachste Veranlassung, die physische Welt zugleich als eine Haupterkenntnißquelle göttlicher Intentionen zu behandeln und dabei in ethischer (und speciell religiöser und ästhetischer) Hinsicht auch die idealen und philosophischen Ziele einer echt humanistischen Schule und Bildung wirksam zu fördern. — Allerdings hätte man den so formulirten vier Hauptfundamenten dieser Bildung annoch die Philosophie, insofern diese als besondere Wissenschaft in verschiedenen Systemen und scholastischen Formen zu einer selbstständigen Erscheinung gekommen, als fünftes beizugesellen. Doch wird dieselbe in dieser Weise in den wenigsten Schulen Raum finden können. Dagegen aber kann und muß mindestens ihr Geist darin vertreten sein, und zwar in allen Räumen und Gliedern ihres Lehrgebäudes. Zur Rechtfertigung dessen bedarf es wohl nur des Hinweises, daß die Philosophie den Beruf und somit der philosophische Geist das Bestreben hat, über die Natur der Dinge in und außer uns das höchste Bewußtsein zu vermitteln; und demgemäs sowohl den untersten Grund als die obersten Ziele und Zwecke alles Dessen, was da ist, zu erforschen und zu klären; somit Alles in den richtigen moralischen wie praktischen Zusammenhang und Einklang zu bringen; und in Allem, im Erkennen wie im Können, den ein- und umsichtsreichsten Punkt und den höchsten und vollkommensten Grad zu erreichen. Sie allein ist erst und gibt erst das denkende Bewußtsein, das alle außerdem mehr nur mechanische Gelehrsamkeit und Bildung erst zu einem wirklich geistigen Eigenthum und Leben erhebt! Sie ist der Geist, der uns und alle Wissenschaft und Technik zum Höchsten treibt und erzieht; ein Geist, der selbstverständlich in allen Lagen des Lebens, auf der Kanzel wie hinter dem Pfluge, seinen reichsten Segen mit sich führt. — Welcher Art und Stufe eine Schule daher auch angehören möge: im philosophischen Elemente sollten alle ihre andern Stämme und Zweige sowohl zu wurzeln als zu gipfeln streben.

Was dagegen die Ordnung u. relative Bedeutung unter diesen letztern selbst anlangt, so bedarf die Behauptung, daß darin dem philologischen Elemente, gleichviel ob es antike oder moderne Sprachen zu umfassen habe, auch in der (humanistischen) „Realschule" der hervorragendste Platz einzuräumen sei, wohl kaum einer Rechtfertigung. Denn insofern der sprachliche Unterricht allen und jeden geistigen Inhalt zum correcten sinnlichen Ausdruck zu bringen und gleichzeitig auch wesentliche Theile des historischen und ästhetischen Gebiets zu umschließen hat und strebt: bietet er in Verbindung mit seinem bedeutenden grammatikalischen und syntaktischen 2c. Turnapparate unstreitig das reichste und fruchtbarste Feld für humanistisch-erzieherische Geistesbethätigungen in hervorragend mannigfachster Art.

Dem gegenüber gilt es nun, über die rechte Stellung und Behandlung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Theiles uns zu verständigen; wobei wir die erste Aufgabe desselben, die (philologisch-historische) Erziehung auch in materialer und praktischer Beziehung wesentlich zu ergänzen, und die Nothwendigkeit dieser Ergänzung — als etwas Selbstredendes — gar nicht weiter erörtern wollen. Immerhin wird ja auch der eigentliche Schwerpunkt des Werthes einer allgemeinen Unterrichtswissenschaft in den mehr formalen Zwecken und Erfolgen der Schule gesucht werden müssen.

Was nun in dieser Beziehung die Mathematik anlangt, so ist bekanntlich von Allen, die das gesammte Reich menschlicher Wissenschaften zu überschauen und zu würdigen im Stande waren, übereinstimmend anerkannt worden, daß die Mathematik (und zwar die angewandte kaum minder als die reine) heute noch eben so als höchstes Muster wahrer Wissenschaft dasteht, wie damals, wo in Rücksicht dessen das klassische Alterthum ihr ausschließlich den Namen Wissenschaft (Mathesis, nach Leibnitz „Wisskunst") zum Eigennamen gab.

Von der Nützlichkeit und theilweisen Unentbehrlichkeit mathematischer Kenntnisse und Geschicklichkeiten ganz abgesehen, dürfte es in der That kaum möglich sein, die mathematische Gymnastik des Geistes durch eine andere irgend wie ausreichend zu ersetzen. Denn keine vermag wie sie, den Schüler zu einer solchen Klarheit, Bestimmtheit und Abstraction und einer solchen Besonnenheit, Tiefe, Logik und Beharrlichkeit im Anschauen, Deduciren und Urtheilen, überhaupt also im Denken und Forschen zu erziehen. Keine hat wie sie soviel Stoff und Gelegenheit zu den wirksamsten Uebungen synthetischer und analytischer Verstandesthätigkeit, zum Einschulen eines correcten u. gleichsam architektonischen Vorgehens im Aufbauen von Wahrheit auf Wahrheit; zur Warnung vor aller Oberflächlichkeit und Inkonsequenz; zu echt didactischer Entwickelung von philosophischer Gesinnung und Kraft.

Während in andern Gebieten Träumerei und dialektische Spitzfindigkeit gar oft gewissen Un- und Halbwahrheiten zum Nachtheile der Menschheit einen hohen Schein von Berechtigung anzudichten vermögen, tritt der mathematische Geist ganz naturnothwendig hiergegen in die Schranken: als der geborene und berufene Kämpfer gegen alles seichte, unklare und unstete Denken und Forschen, und gegen alle Gesetzlosigkeit und Unordnung überhaupt. Denn er und seine Schule ist anders nicht gewöhnt, als mit reinster Objectivität und strenglogischer Gesetzmäßigkeit vorzugehen. So daß man gewissermaßen sagen kann: eine Schule, die den Geist der Mathesis in rechter Weise cultivirt, cultivirt damit überhaupt den Geist philosophischer Besonnenheit, Gründlichkeit, Konsequenz und Ordnung, wie auch den der vollendetsten Speculation und Wissenschaftlichkeit in Theorie und Anwendung, und somit den Geist, ohne den alle forschende wie praktisch-wirthschaftliche und technische und selbst alle politische und sonstige staatsbürgerliche Thätigkeit dem Irrthum und der Halbheit zu verfallen mehr und weniger Gefahr läuft. Womit indeß nicht behauptet sein soll, daß solche Intelligenz nicht auch — etwa in Verbindung mit von Haus aus glücklichen Anlagen dazu — durch anderseitige Studien erworben werden könne; jedenfalls aber am kürzesten und vollkommensten durch in obgedachtem Sinne erzieherisch-mathematischen Unterricht.

Wie wenig in der That selbst für die blos intellectuellen Zwecke der Erziehung die mathematische Gymnastik des Geistes durch die philologische ersetzt zu werden vermag — außer etwa bei solchen, die von Geburt aus durch Mutter Natur mit jener Abstractionskraft, Tiefe und Logik der Anschauungs- und Denkthätigkeit ausgestattet sind, welche sonst nur die Frucht mathematischer und philosophischer Studien und Uebungen zu sein pflegt — das haben besonders alle Mathematiker an höhern Lehranstalten wahrzunehmen Veranlassung: angesichts der Schwierigkeiten, welche philologisch-kräftig, mathematisch aber nur dürftig geschulte Gymnasiasten zu überwinden haben, wenn sie in den strengern Bahnen mathematischer Denk- und Forschungsthätigkeit mit wandeln sollen. Denn die Fabel von der Existenz und Nothwendigkeit eines besondern mathematischen Sinnes reducirt sich lediglich auf Mangel an Uebung oder an Kraft oder Lust zu tiefern abstractem und beharrlichem Denken überhaupt. Haben doch vor Zeiten schon Plato, und später Pestalozzi, Schmidt u. A. thatsächlich bewiesen, daß die mathematische Bildung bei richtig-pädagogischer Entwickelung auch dem einfachsten gesunden Verstande begreiflich und eigenthümlich gemacht werden kann.

Allein, wenn wir auch Alle wissen und zugeben, daß aus den angedeuteten Gründen mit Recht die Philosophen und philosophischen Erzieher aller Zeiten die Mathematik als Muster der Wissenschaft nach Form und Geist, und als Bildungsmittel in oben angeführtem Sinne allen andern voranstellten; wenn wir es bewundern, mit welch philosophisch-pädagogischer Einsicht schon Plato die Kenntniß der Geometrie (damals fast gleichbedeutend mit Mathematik) zur Vorbedingung für den Eintritt in seine Akademie zu machen sich veranlaßt sah; und wenn wir auch Alle uns damit einverstanden erklären, daß der geistreichste Naturforscher des vorigen Jahrhunderts (Lichtenberg) die Mathematik als „die beste Schleif-

mühle des Verstandes" proklamirte: so dürfen wir doch auch andererseits ja nicht übersehen, daß einem durch philologisch-historisch-mathematische Studien lediglich theoretisch und abstract betheiligtem Geiste gar leicht (wo nicht in der Regel!) jene so berüchtigte und nachtheilige Steifheit, Einseitigkeit und Unbeholfenheit überkommt, welche vor Bäumen den Wald nicht zu erkennen, im wirklichen praktischen Leben selten etwas beim rechten Zipfel anzugreifen und oft in der technischen Verwendung ihrer eigensten Berufswissenschaft träumerischen Auges das nächste und natürlichste nicht zu erfassen und richtig zu benutzen vermag.

Es liegt, gegen das Frühere bemerkt, kein Widerspruch vor, wenn es unserm eben citirten Physiker an einer andern Stelle seiner Schriften zu dem Ausdrucke drängt: „Die Mathematik ist zwar eine herrliche Wissenschaft, aber die Mathematiker taugen dem Henker nicht!" — kein Widerspruch: denn alle Welt weiß, daß er ähnliches eben so gut von der Philologie und den (sogenannten Stock-) Philologen behaupten könnte, und daß er damit eigentlich nur dem gerechten Vorwurfe gegen alle Einseitigkeit in Bildung und Erziehung Worte verliehen hat; welche Einseitigkeit sich im wirklichen und praktischen Leben nur um so hülfloser und unbrauchbarer erweist, je mehr sie in der Richtung nach der rein theoretischen Welt oder im Gebiete des Abstracten und Idealen groß gewachsen ist.

Gegen solch, für gewisse Kreise fast sprüchwörtlich gewordenes einseitiges träumerisches und ungeschicktes Wesen — das pure Gegentheil der anzustrebenden praktischen Intelligenz — bildet aber die (auf Natur, Technik und Wirthschaft und überhaupt auf die physische Welt) angewandte Mathematik, in Verbindung mit den eigentlichen naturwissenschaftlichen Unterrichtszweigen (oder den Naturwissenschaften im engern Sinne), das schulgerechteste und wirksamste und darum auch in einer rechten humanistischen Schule gar nicht zu entbehrende Vorbeugungs- und Ergänzungsmittel. Zur rechten Würdigung dieses Verhältnisses müssen wir bedenken, daß jene „angewandte Mathematik", (indem sie die auf Zahl und Raum, auf Größen- und Formverhältnisse der sinnlichen Erscheinungen sich beziehenden Gesetze und somit gleichsam die formelle Seite der physischen Wissenschaften zu behandeln hat) im wesentlichen eigentlich nichts anders ist, als Naturwissenschaft selbst: die Ergänzung der materiellen (chemischen) Hälfte derselben. Diesem nach hat die Mathematik gewissermaßen innerhalb des großen Gebiets der physischen (Natur- und Wirthschafts-) Wissenschaften eine ganz ähnliche Stellung und Function wie die Grammatik innerhalb des philologischen Gebietes. Und ist (wie Physik, Mechanik, Stöchiometrie, Krystallographie, Astronomie, Geodäsie 2c. uns beweisen) in dieser ihrer Richtung auf die physische Welt zugleich der Schlüssel zu den feinsten Naturerkenntnissen und den tiefliegendsten technischen und Wirthschaftsgesetzen.

Verlangt nun schon die **materiale** (nützliche „positive" Kenntnisse, menschwürdiges Wissen und Bewußtsein bezweckende) Aufgabe eines alle nachtheilige Einseitigkeit bekämpfenden humanistischen Erziehungswerkes gebieterisch genug die Mitwirkung eines angemessenen und in geistig-erzieherischer Weise behandelten Unterrichts in diesen auf **Natur und Leben** hingerichteten Wissenschaftszweigen, so verlangt sie unserer Meinung nach viel gebieterischer noch der **formale** Erziehungszweck.

Zur Heranbildung einer für die Außenwelt aufgeschlossenen Intelligenz und Wissenschaftlichkeit — einer Intelligenz, welche die reale Welt mit eben so praktisch-sinnigem als offnem und umsichtigem Wesen zu sehen und zu verfolgen, anstellig und correct zu erfassen und möglichst rationell zu benutzen, die segensreiche Kraft haben soll — zu solcher Bildung vermögen nun zwar allerdings manche Zweige der engern Naturwissenschaft in wesentlicher Weise mitzuwirken, wie z. B. die bestimmenden Theile und Uebungen der Mineralogie, Geologie und Botanik; namentlich zum Einschulen des auf äußere Merkmale gerichteten scharfsinnigen Sehens, Unterscheidens, Kombinirens und Deducirens. Selbst die rein materiale Seite der Physik und Chemie gewährt in dieser Beziehung bedeutsame Uebungen für die auf die Außenwelt gerichtete synthetische und analytische Beobachtungs- und Denkthätigkeit: sobald man deren Lehren möglichst heuristisch zu entwickeln sucht; wie ich in früheren Jahren meiner Lehrerlaufbahn, wo ich in jenen Zweigen mit zu unterrichten hatte, sattsam erfahren: indem ich, einerseits nach Feststellung der nöthigen Grundlagen, solche Naturerscheinungen von meinen Schülern a priori konstruiren ließ, die ich ihnen nachher durch's Experiment vorführen konnte, um ihnen dadurch die Richtig-

keit oder Unrichtigkeit ihrer synthetischen Naturforschungsthätigkeit zu beweisen; andererseits, indem ich eine auf ihnen bereits bekannten naturgesetzlichen Grundlagen beruhende Erscheinung ohne weiteres als Experiment vorführte mit der Aufgabe, durch deren umseitige Beobachtung das wesentliche vom unwesentlichen trennen und auf solche analytische Weise die eigentlichen bedingenden Grundlagen dieser Naturerscheinung auffinden und gleichzeitig dadurch überhaupt gründlich und vorsichtig beobachten zu lernen; — eine theilweis zwar etwas zeitraubendere, aber für die Schule wie das Leben ungleich dankbarere Unterrichtsweise.

In so fern nun aber in dem Reiche physischer Wissenschaft und Forschung wiederum der mathematische Theil es ist, der (wie z. B. die Mechanik) als höchstes Muster logischer und überhaupt wissenschaftlicher Naturbeobachtung und Naturbenutzung dasteht, so muß derselbe natürlich auch ganz besonders geeignet erscheinen, die fragliche Intelligenz auf ihren Höhepunkt zu fördern. Und scheinen mir dabei einen namhaften und eigenthümlichen Werth in dieser Beziehung auch diejenigen mathematischen Studien und Uebungen zu besitzen, welche, wie z. B. die der praktischen Geodäsie, in unmittelbarster und buchstäblich praktischster Weise Natur und Leben erfassen und den Schüler zwingen, mit geistiger und körperlicher Selbstthätigkeit die Wissenschaft zu allerlei nützlichen Zwecken möglichst rationell zu **handhaben.**

In einer kleinen aber bedeutenden Schrift (Mathematik und Philologie von Dr. Drobisch, Leipzig 1832) hat einer unserer klassisch-gebildetsten Hochschullehrer unter anderem nachgewiesen, wie auffallend es in der Geschichte des griechischen Alterthums zu bemerken sei, daß dort nur im Zeitalter und Verfolge eines ernsten und emsigen Studiums der Mathesis auch besonnene und gründliche Forschung in den verschiedenen anderen Zweigen damaligen Wissens und Strebens vorwaltete, und wohlthätige und praktische Früchte trug; und daß sich fast in eben dem Maße, als sich mit Platon's Principien zugleich die heilsame mathematische Gymnastik aus den Schulen und damit zugleich die Blüthe ihres oben (S. III) karakterisirten Geistes verlor, in gleichem Maße auch die der praktischen Wissenschaftlichkeit und Philosophie allmälig abhanden kam, um allerlei Flüchtigkeit, Oberflächlichkeit, Schwärmerei und Täuschung Platz zu machen. — Mit dieser historisch-begründeten Warnung hat aber ihr Verfasser, unsrer Ansicht nach, nicht allein der Cultur der theoretischen, sondern auch der der praktischen Mathematik in Schule und Leben das Wort geredet.

Wir dürfen nämlich, wenn wir letztere in ihrer Richtung auf Natur, Technik und Wirthschaft in jenen klassischen Zeiten weniger hervortretend finden, nicht übersehen, daß damals zum Theil die Mathematik selbst noch in der Kindheit und die eben genannten physischen Gebiete kaum erst in den Anfängen vorhanden waren. Um so bezeichnender aber ist es, wie trotzdem die Alten sich bemühten, der Mathematik (z. B. in Absicht auf Astronomie und Geodäsie) praktisches Leben einzuhauchen, und dazu selbst die Erfindung von Fabeln nicht verschmähten.

Alles in Allem erwogen, dürften somit selbst diejenigen **Gymnasien,** welche lediglich das altklassische Princip als masgebend für sich betrachten, nicht allein ihrem wahren humanistischen Berufe, sondern auch ihren eigensten historischen Idealen und Principien in dem Grade untreuer werden, in welchem sie sowohl der Mathematik an sich als namentlich auch deren auf Natur und Leben gerichteten Thätigkeit und deren Bildungskraft die gebührende Anerkennung und Einwirkung versagen. Daß in Befolgung dessen dem weisen Gesetze „Non multa sed multum" zu nahe getreten werde, ist durchaus nicht nöthig und namentlich dann nicht zu befürchten, sobald wir dazu die in dieser Beziehung so ganz eigenthümlich kernigen Hülfen der Meßknechts-Brieftasche benutzen, und dabei bedenken: daß, wenn wir von deren reichhaltigem Uebungsmaterial auch nur **den zehnten Theil** im angedeuteten Sinne pädagogisch wirksam zu machen vermögen, damit für Mittelschulen allgemeinerer Art schon viel, wo nicht schon das wesentlichste gewonnen wäre. Denn für diese ist ja das im Texte und Meßapparate der Brieftasche dargebotene technische Material in der Hauptsache mehr nur Mittel, (gleichsam nur Geräth zum Zwecke mathematischer und überhaupt geistiger Gymnastik) während es allerdings bei den Schulen gewerblicher Art zugleich auch einen sehr wesentlichen Zweck mit bildet.

Seine pädagogische Ausbeutung für letztere (also für höhere wie mittlere Berufsschulen technischer, merkantilischer, militärischer, forst- und landwirthschaftlicher oder sonst gewerblicher Art), liegt übrigens so selbstverständlich auf der Hand, daß sie specieller Erläuterungsbeispiele kaum bedarf.

Dagegen dürfte es nicht überflüssig sein, in Absicht auf den mehr allgemeinen geistig-gymnastischen oder formalen Bildungszweck einige solche speciellere Andeutungen und Beispiele aufzuführen, und zwar wiederum wie vorn (s. die im gegenwärtigen Bruchstück weggelassene vordere Hälfte der betreffenden Einleitung), hauptsächlich aus und auf dem elementaren Gebiete der Mittelschulen. — Wie in folgendem geschehen soll.

Die erste Uebung wird natürlich immer auf die Kunst eines recht flotten und dabei nicht blos richtigen, sondern auch recht feinen (exacte Schätzung der untersten Decimalen bedingenden) Ablesens der Meßknechtswerthe gerichtet sein. In so fern nun die damit verbundene Schulung des Auges den Blick an ein scharfes mathematisches, zugleich nüchternes und gewandtes schnelles Sehen gewöhnt, ist dieselbe überhaupt, namentlich aber für allerlei Beobachtungs- und Schätzungsthätigkeit, sicher nicht ohne allen erzieherischen Werth.

Bei der demnächst nothwendigen Orientirung über das Kapitel der Maskunde unterlasse man nicht, dem Schüler sowohl die absoluten Größen der verschiedenen Mase als auch deren gegenseitige Beziehungen zu recht lebendiger Anschauung zu bringen, etwa durch Aufgaben wie folgende: 1) „Zeichnet auf ein Papier die Größe unsers landesüblichen und dann z. B. die des englischen Fußes"; welche Arbeit mittels der betreffenden Maskunde und Meßknechts Centimetermaßstab in wenig Minuten bewirkt sein kann. — Und 2) „Gebt an eurem Körper irgend einen Punkt an, bis zu welchem von der Sohle ab das Meter reicht" (welcher Punkt vom Schüler ein für allemal zu merken ist, um sich nöthigenfalls auf die schnellste Weise im Walde oder Felde einen Stab oder Zweig zu einem Metermas od. dergl. zuzuschneiden).

Hierauf zu den arithmetischen Elementarlehren übergehend, hat man schon im Kapitel von der Division Gelegenheit, am Practicum von Meßknechts Reciprokentafel zu zeigen, wie man durch zweckmäßig technische Zurechtlegung der einschlagenden Gesetze und durch gewandtes Sehen und Denken bereits in derlei einfachsten Rechnungsgebieten sich und dem praktischen Leben zu nützen vermag; „durch gewandtes Denken" insofern nämlich, wenn es gilt, sich zur Vermeidung einer etwa unvollkommenen Stelle der Tabelle in eine schärfere zu spielen, oder sich eine Gegenprobe durch Benutzung einer andern Tafelstelle zu verschaffen.

Z. B. „Leset recht flott und fein den Werth von $\frac{7}{64{,}94}$ auf zweierlei Art ab! Aus $\frac{1}{64{,}94} \times 7$ folgt durch Ablesung bei 649_4 schnell $0{,}01539 \times 7 = 0{,}1077_3$. Aber kaum minder schnell nach vorherigem Dividiren mit 7 folgt $\frac{7}{64{,}94} = \frac{1}{9{,}277}$ und durch Ablesung bei 927_7 das zweite Resultat 0,1077 (bis zu dieser letzten 7 ebenfalls unzweifelhaft).

Nachdem dann die Lehre der zweiten und dritten Potenzen und Wurzeln begründet und das gewöhnliche Verfahren zur Ausrechnung derselben in den Schülern hinlänglich befestigt ist, läßt man nun letztere mit Hinweis auf Meßknechts Qw. und Cw.-Spalte, möglichst durch eignes Raffiniren jene (im „Aschenbrödel auf S. 16—20 behandelten) Regeln finden und begründen, mittels deren der praktische Mathematiker diese Lehren und Hülfen seinen Zwecken dienstbar machen kann und soll. Hieran lassen sich nun schon wieder allerlei andere geistig turnerische und comparative Uebungen anknüpfen; indem man z. B. dem Schüler aufgiebt, dasselbe Resultat aus verschiedenen Orten der betreffenden Tabelle und vielleicht auch auf noch ganz anderen (z. B. logarithmischen) Wegen abzuleiten.

Erheblich lebendiger und im Interesse einer auch auf die Außenwelt gerichteten praktischen Intelligenz wirksamer werden schon diese ganz elementaren Rechnungsübungen, wenn die Schüler bereits soviel algebraische Vorbildung besitzen, daß sie die Benutzung und Behandlung gewöhnlicher Gleichungen und Formeln verstehen, und sonach (theilweise unter Anleitung des Lehrers) diesen und jenen Paragraphen des Textbuchs der Brieftasche zu lesen und seinem nächsten und wesentlichsten Sinne nach aufzufassen und anzuwenden vermögen. Denn dann können wir ihnen zumuthen, schon jetzt ihr bischen Mathematik mit verhältnißmäßiger Selbstständigkeit aufs Leben anzuwenden. — Dieses Herbeiziehen fremder oder wissenschaftlich noch nicht begründeter Gegenstände wird manchem meiner Herren Collegen auf den ersten Blick bedenklich erscheinen. Es ist jedoch durchaus nicht unpädagogisch und hat keinerlei Gefahr: sobald man im Schüler nur gleichzeitig das Bewußtsein pflegt, daß er alles behufs Uebung seiner mathematischen Kräfte aus anderen Gebieten entlehnte Material auch immer nur als etwas Geborgtes, und daß er überhaupt

alle wissenschaftlichen Wahrheiten nicht eher als sein wirkliches und mit Sicherheit weiter zu verwendendes Eigenthum betrachten kann, bevor er sie sich nicht durch wissenschaftliches Studium zu eigen gemacht. Bis dahin soll er es — wie bemerkt — immer nur als einen blos entlehnten Gegenstand betrachten; entlehnt gleichsam als Geräth und zu dem Zwecke, das bisher wirklich Erworbene gehörig und rechtzeitig auf dem Felde des praktischen Lebens zu veranschaulichen, zu befestigen und fortzuentwickeln.

So gewähren z. B. in der Arithmetik und Algebra Mittheilungen aus der Planimetrie, Stereometrie, Physik und Mechanik 2c. zahlreiche Motive zu den interessantesten Uebungen; namentlich rücksichts der Construction und Anwendung der Gleichungen, wozu man in den Lehrbüchern und Schulen häufig nur Beispiele von so forcirter und kindlicher Art vorfindet, daß der Schüler ganz seichte Begriffe vom Ernste und Werthe dieser Kunst sich anzueignen Gefahr läuft. Andererseits erweisen sich für die Geometrie und Stereometrie, insbesondere auch für Trigonometrie mancherlei Beispiele aus der Physik, Mechanik, Technologie 2c. (und somit die Herbeiziehung passender Paragraphen der Kapitel VIII., IX., X. und XI.) als ungemein belebend und wirksam.

In der That: müßten wir jede arithmetische oder geometrische Excursion in eines der technischen Kapitel der Brieftasche oder überhaupt in ein Gebiet, das noch nicht wissenschaftlich begründet sondern nur erst mehr sinnlich begreiflich erschlossen werden kann, als einen pädagogischen Fehler verwerfen: so müßte man das Leben selbst und dessen erhabenen Schöpfer und Meister, den Lehrer aller Lehrer, ebenfalls für unpädagogisch erklären. Gleichwie aber der liebe und weise Gott uns nicht mit Scheuklappen hat geboren werden lassen — weil er will, daß wir freien Auges und freien Sinnes Alles wahrnehmen, was überhaupt im Bereiche unserer Wahrnehmungen liegt, wenngleich wir über dessen Wie, Warum und Wodurch häufig noch keine volle Aufklärung besitzen; und weil er uns dadurch reizen und auffordern will, unsere bislang erworbenen Kenntnisse und Kräfte an Allem zu versuchen, was dieselben theils zu befestigen, theils zu erweitern Veranlassung giebt — also sollen und dürfen auch wir uns mit unserer Schule nicht vor jener Welt theoretischer wie empirischer Thatsachen verschließen, welche uns die angrenzenden Wissensgebiete anregend und mehr und minder ungesucht entgegenbringen; wie solches z. B. in Bezug auf die mathematische Sphäre durch die naturwissenschaftlichen und technischen Kapitel dieser Brieftasche geschieht. — Nicht nur würden wir damit unsern Schülern eine reichhaltige Quelle lehrreicher und lebensfrischer Beispiele zu allerlei bildenden Uebungen und Aufklärungen in Absicht auf Wesen, Werth und Handhabung der Mathematik und damit zugleich die natürlichsten Gelegenheiten zur Ausübung und Entwickelung ihrer bis dahin erlangten Messungs- und Rechnungskenntnisse vorenthalten: sondern würden uns zugleich auch eines der wirksamsten Mittel berauben, das geeignet ist, im Schüler einen noch über die Schule hinaus wirkenden fruchtbaren Keim zu erwecken, der ihn sporne, in jenen so interessanten und nützlichen Gebieten weiter vorzudringen und sich möglichst viel davon zum wirklichen oder vollbewußten (d. h. zum wissenschaftlich erworbenen) Eigenthum zu machen.

Von manchen Mathematikern an Gymnasial- und humanistischen Realschulen haben wir den vorangegangenen wie nachfolgenden Beispielen gegenüber möglicherweise auch noch den Einwand zu erwarten, daß bei Benutzung von derlei „Eselsbrücken" (wie sie z. B. Meßknechts Wurzel- und Kreistafeln und ähnliche Hülfen unserer Brieftasche nennen werden) die Schüler „das eigentliche Rechnen" verlernen würden. Allein, was ist „eigentliches" Rechnen? Gehört z. B. das Logarithmiren etwa nicht auch dazu? Und wird nicht auch dadurch das gewöhnliche Wurzelausziehen und dergl. beseitigt? Daß dieß (und ähnliches ohne besondere Kunsthülfen Ausführbares) nicht verlernt werden dürfe, ist selbstverständlich. Doch erledigt sich diese weise Lehrersorge fast von selbst. Denn es liegt zu nahe, im Verlaufe der Uebungen das eine oder andere der durch Hülfstafeln (z. B. Meßknechts-Kreistabellen) um so und so viel schneller gefundene Resultat durch eine Gegenprobe auf Grund der ursprünglichen Formeln dann und wann untersuchen zu lassen.

Um wie vieles wichtiger hiergegen ist — ganz abgesehen noch von der mit der Einübung und rationellen Handhabung von derlei Kunsthülfen nothwendig verbundenen wissenschaftlichen Gymnastik — die Thatsache, daß, indem solche Hülfen, an Stelle der niedern Mechanik der Wissenschaft, deren Geist und höhere Technik einsetzen, sie die Schule von dem zeitraubenden und

hemmenden Ballaste des selbstverständlichen elementaren und handwerksmäßigen Theils ihrer mathematischen Arbeiten befreien, und ihr dadurch ein erhebliches Mehr an Zeit und Frische und Anreiz gewähren, sich höheren und umfänglicheren Zielen und geistigeren und nützlicheren Thätigkeiten zu widmen. In der That, „Eselsbrücken" solcher Art eingeführt und in steter Wahrung der Würde und Interessen der Wissenschaftlichkeit in der Schule gebraucht, können bei letzterer Inhalt, Werth und Wirkung ihrer Leistungen (und somit auch ihre Bildungskraft) in materialer wie in formaler Hinsicht nur erhöhen.

Noch erheblicher wirksam, weil die analytische wie combinatorische Denkthätigkeit und den praktischen Sinn in der Art der Anwendung der Wissenschaft mannigfaltiger entwickelnd, gestalten sich die Uebungsgelegenheiten auf dem geometrischen Gebiete.

Schon die den Schülern aufzugebenden Untersuchungen*), ob die Schnittkanten des Meßknechts correct genug parallel resp. rechtwinklich zu einander; ob die punktirte Richtlinie der Pendelwand genau normal zum ersten (durch Null Grad gehenden) Radius ihres Höhenkreises; ob die zwei Ringelchen unter der querlaufenden Schnittkante auf der andern oder Horizontalwand des Knechtes (welche mit dem Nullpunkte seines Kreisbogens die drei Einsteckpunkte bilden, für den Fall, daß man den Knecht als Winkelkreuz nicht blos mit seinrn Schnittkanten, sondern durch die Visirstifte des Zeughäuschens verfeinert anwenden will) eine zum ersten Radius ebenfalls genaue Rechtwinkliche bilden; ob betreffende Visirstifte genau lothrecht gegen die Basis ihrer Querbalken, u. s. w.; und wie die Schüler erforderlichen Falles alles dieß justiren; wie sie es dann schon im Zimmer durch Uebungen aus freier Hand dahin bringen müssen, Elevationen und Depressionen bis zu mindestens einen halben Grad, dagegen Sonnenhöhen bis mindestens einen viertel Grad genau zu beobachten; ferner zu je Drei u. Drei ohne Stativ rechte u. andre Winkel, Figuren u. Flächen abzustecken; 2c. 2c. — all diese und ähnliche kleine geometrische Vorbereitungen vermag bereits der Lehrer zur Erziehung von theoretischer wie praktischer Anstelligkeit u. Gewandtheit zum größern Theile schon in der Stube mit Vortheil auszunutzen.

Hiernächst aber liefert nun die Planimetrie und Geodäsie ein zahlreiches Contingent von Uebungen, die sich durch die Combination mit den einschlagenden arithmetischen und namentlich trigonometrischen Meßknechtshülfen ganz besonders mannigfaltig und wissenschaftlich wie praktisch bildend gestalten.

Um dies, und zwar wiederum nur innerhalb des elementaren Gebiets der Mittelschulen zu versinnlichen, wollen wir uns einen

mathematischen Nachmittags-Spaziergang

vergegenwärtigen, bei welchem etwa je vier und vier unserer jungen Freunde mit dem Stativstock und einem Meßbande versehen seien. Doch lasse der Lehrer, wo irgend thunlich, alle durch Messung zu bestimmenden Resultate vorher durch Auge und Schritt, überhaupt zunächst schätzend feststellen: um auch hierbei manche gute Gelegenheit, auf die Intelligenz des Auges und des Geistes in Beobachtung der Außenwelt bildend einzuwirken, nicht unbenutzt vorübergehen zu lassen. — Es versteht sich von selbst, daß man die folgende Excursion eben auch blos in der Idee und ohne die Stube zu verlassen durchmachen könne. Meist wird dieß zur theils theoretischen theils praktischen Vorübung sogar nöthig und heilsam sein. Ihr wesentlichster Zweck und Nutzen wird jedoch hauptsächlich auf die Füglichkeit und Thatsächlichkeit ihrer wirklichen Ausführung beruhen.

Wir wandern also!

Und an einer beliebigen Feld- oder Waldecke C angekommen, fragen wir:

1. „Welchen Raum schließen die beiden Seiten a und b dieser Ecke in ihr Winkelblatt oder Dreieck ein?" Die in der Dreieckslehre (der Brieftasche) orientirten Schüler werden also a und b und $\angle$ C (mittels Knecht als Chordentafel od. directer mittels Knecht als Horizontalkreis od. „Theodolit") messen und in kurzer Zeit dem Lehrer die Antworten bringen, bei deren nicht ausbleibender Verschiedenheit 2c. dem Lehrer gute Veranlassung geboten ist, ihnen zu Gemüthe zu führen, wie viel ihnen etwa noch an praktischer Intelligenz oder an wissenschaftlichem Genauigkeitssinn mangelt.

Ehe wir weiter gehen, verlangen wir von ihnen

2. „Möglichst gewandt auf vorig. beiden Seiten a u. b die 5 Punkte zu bezeichnen, deren gegenseitige Verbindungslinien, unter sich

*) S. „Aschenbrödel" S. 10—12; und später im Abschnitt: „Geodäsie."

parallel, diese Dreiecksfläche in sechs gleichgroße Streifen theilen." Wobei Nachdenken und Erinnerung an den betreffenden Paragraph ihrer Brieftasche diese Absteckung, nach flottem Ablesen der Quadratwurzeln von $^1/_6$, $^2/_6$, $^3/_6$, $^4/_6$ und $^5/_6$ und deren Multiplikation mit a und b, in kurzer Zeit bewirken wird.

3. „An einer beliebigen Seite eines nicht parallelogramm'schen Feldes parallel zu jener, und also in Form eines Trapezes, eine Fläche von bestimmter Größe (etwa 1 Morgen) abzustecken. — Eine hübsche Uebung für die Knechtsverwendung als Winkelkreuz; wobei man den Schülern erst den Näherungsweg verstattet; dann aber die wissenschaftliche directe Ausführung nach dem betreffenden Paragraphen von der Trapeztheilung verlangt.

Hierauf an oder auf einem Hange oder Berge angekommen, fragen wir weiter, etwa wie folgt:

4. „Welchen Steigungswinkel α hat hier das Terrain?" Antwort erst schätzend durch Vergleichung mit dem aus Horizontale und Loth gebildeten Neunziggradwinkel; dann mittels Knecht aus freier Hand visirt; schließlich durch den armirten Stativknecht controlirt. Beispielsweise sei $\alpha = 18,0°$.

5. „Wie groß dessen Steigung oder Gefälle im Verhältniß 1) zum Horizontalgrund u. 2) zur wirklichen oder schiefen Länge?" Der anschauende und denkende Schüler liest, nachdem er seine Augenschätzung ausgesprochen hat, berichtigend aus Meßknechts Tangenten- resp. Sinuskale ad 1) $32^1/_2$ %, ad 2) 30,9 %.

6. „Um wieviele Procent ist die projectirte oder Horizontal-Größe vorliegender (geneigter) Distanz oder Fläche kleiner als deren wirkliche?" Nach stattgehabter — in der Regel sehr irriger — Augenschätzung läßt man folgern aus der Cosinus-Spalte bei 18,0° die richtige Antwort: daß der Horizontalgrund 95,1 % der Schiefen und somit 4,9 % kleiner als letztere sei.

7. „Um wieviele Procente meint Ihr wohl, daß derlei Schiefdistanzen und Hang- oder Bergflächen (von 18° durchschnittlicher Elevation) größer sind, als deren Horizontal- und Kartengröße besagt?" Ist zwar aus Vorigem durch die Proportion $95,1 : 100 = 100 : x$ (= 5) abzuleiten, am zweckmäßigsten aber gleich bei der ersten Visur mit abzulesen, wo das Pendel zu 18° in der Sekantenspalte die (100 fache) Sekante = 105, die gefragte Außensekante also zu 5 % angab.

8. Auf einem gerade oder in beliebigem Zickzack emporsteigenden Bergpfade lasse man den durchschnittlichen Steigungswinkel, sowie Länge und minutliche Anzahl der Schritte beobachten (mittels des am Knechte selbst befindlichen Centimetermases und seines Halbsecundenpendels) und frage darauf: „Welche Höhe bringen wir stündlich unter uns, wenn wir stetig so fortwandern?" Bei 18,0° Steilheit und stündlich 2000 Schritt à 2' (= 4000') würden unsre Begleiter antworten müssen: = dem 4000 fachen Sinus von 18°, was laut Knecht = 0,309 × 4000 = 1236 Fuß geben würde.

9. „Steckt je Vier und Vier von Euch an diesem Hange (durch gegebene Anfangspunkte) Horizontalen ab, und zwar erst mit dem Freihand- dann mit dem Stativknechte." — Ersternfalls, indem des Visirers Auge als Stativhöhe, sein Nachbar als Controleur des Pendeleinspielens, und der Anvisirte (an welchem des Visirers Augenhöhe vorher abgemessen und angemerkt wird) als Ziellatte dient. Will letzterer durch Rückvisum controliren, so bedarf er zur Seite ebenfalls eines Zweiten zum Dirigiren des Pendels.

10. „Steckt mir nun auf ähnliche Weise am Hange einen Weg von 5 Grad (oder wieviel Procent?) Steigung ab?" Nachdem die eingeklammerte Form der Frage mittelst der Tangententafel durch „8,7 % der Horizontalgröße" beantwortet, haben unsre Leutchen ihre vorige Arbeit in so fern zu modificiren, als das Pendel nun nicht auf Null, sondern stets auf ∠ 5 Grad oder auf die Tangente = 8,7 einzuspielen hat

11. An etwas steiler, beispielsweise 9° betragender Stelle einer mittelmäßig chaussirten Landstraße werfen wir die einfache Frage hin: „Wie verhält sich oder wie wächst hier der Widerstand eines gewöhnlichen Lastwagens im Vergleich zu dem auf den Horizontalstellen dieses Weges?" wobei wir die in der Mechanik nicht genugsam Bewanderten allenfalls noch auf den Paragraph vom „Fuhrwerkswiderstand" aufmerksam machen werden. — Der denkend ein- und umblickende Schüler wird wahrscheinlich als Reibungscoefficient $\varphi = {}^1/_{25}$ oder 0,04 und somit als Reibungswinkel ϱ laut Tangentenskala $2^1/_4$ Grad und somit den Widerstand P der Last Q auf der Horizontale erkennen als $P = 0,04\,Q$.

Und nachdem er den Steigungswinkel $= 9^0$ beobachtet hat, stehenden Fußes den Widerstand auf der Steigung als $P_1 = \frac{\sin. (9^0 + 2^1/_4)}{\cos. 2^1/_4} Q = 0{,}195 Q$ finden; wonach $P : P_1 = 0{,}04 : 0{,}195$ oder $1 : 4{,}9$ und somit eine fünffache Anstrengung der Zugkraft sich herausstellt. — Oder einfacher näherungsweise: Beim Einvisiren der Straßenneigung zeigt das Pendel die Tangente 16 %, also steigt der Widerstand von vorher 4 % auf nahe (4 + 16) od. 20 %.

Nun vor irgend einem Waldbaume oder Bestande angekommen, lassen wir erst schätzend, dann schritt- und dann bandmessend, beantworten:

12. „Welche Scheitelhöhe hat dieser Baum?“ u. 13. „Bei welchem Zehntel dieser Höhe liegt sein eigentlicher Kronenansatz, oder wie verhält sich dessen Schafthöhe zur Scheitelhöhe?“ (Letztres leicht ohne Kenntniß der Standferne zu beantworten, indem man letztere = 1 oder = 100 setzt).

14. „In welcher Höhe liegt der (mit bloßem Auge leicht und ziemlich sicher zu erkennende) Punkt der halben Grundstärke oder (Verfassers) „Richtpunkt“ zur einfachsten u. sichersten Kubirung stehender Hölzer?“ (wobei als „Grundstärke“ derjenige Durchmesser ins Auge gefaßt und vor- oder nachher gemessen wird, welcher mindestens 4' über dem Wurzelknoten liegt, um damit möglichst über die Region des allzu ungleichförmigen Wurzelanlaufs zu kommen. (Will man blos wissen, in welchem Bruchtheil der Scheitelhöhe er liegt, um daraus auf des Stammes Formzahl zu schließen, so bedarf es, wie sub 13, weder einer Messung der Standferne noch der Grundstärke; s. V.'s Frstls. Hülfsbuch.)

15. „Welche (echte) Formzahl kommt somit der vorstehenden Stammklasse zu?“ (Nun unschwer nach V.'s System im betr. Brieftaschen-Kapitel od. nach „Forstln. Hülfsbuchs Taf. u. Regeln 13 u. 14 zu bestimmen.)

16. „Welchen Inhalt hat hiernach solch ein Baum oder eine Baumklasse an Stamm- wie Astholz und zwar a) nach dem Richtpunkt, b) nach der Formzahl.“ (Hierbei Gelegenheit, die flotteste Bestimmung von Kreisflächen und deren Ablesung bis für das Hunderstel-Zoll zu üben; sowie den Fehlereinfluß unordentlich gemessener Grundstärken anschaulich zu machen.)

17. „Wieviel zweispännige Fuhren gehören dazu, die Masse von so und so viel Bäumen dieser Art zu transportiren?“ Zu beantworten unter Hinweis auf die Angaben der Brieftasche über Holzgewicht, Zugkraft und Fuhrwerkswiderstand.

18. „Steckt mir nach Masgabe dieses Fuhrwerks-Widerstandskoefficienten an diesem Hange eine Straße ab, deren Neigung so sei, daß mit der vollen (Horizontal-) Ladung die Pferde bergauf just die doppelte Anstrengung und demnach keinen Vorspann und bergab keinen Hemmschuh noch Widerhalt brauchen.“ — Einvisiren mit und ohne Stativ; bekanntlich muß hierbei die Tangente des Neigungswinkels = sein dem betr. Widerstandskoefficienten.

19. „Steckt in diesem Bestande eine rechteckige Probe von F Morgen ab und zwar a) ohne und b) mit Stativ!“ (Lehrreicher, wenn die Bodenfläche geneigt ist und unter dem Abzusteckenden die Horizontalgröße gemeint ist; bekanntlich ist dann erst die Secante der Neigung einzuvisiren und F zu vergrößern durch $F \times \text{Sec. } \alpha$)

20. „Zählt und bemeßt die Stammgrundfläche in der Art, daß Ihr die mit Band in Brusthöhe ermittelten Stärken in von Zoll zu Zoll aufsteigende Stufen trennt.“ Und

21. „Gebt auf Grund solcher Auszählung den Dichtheitsgrad dieses Waldorts (Stammgrundverhältniß) und (nach Nr. 16) dessen Massen- und Sorten- und Werthsgehalt pro Acker an!“ (Näheres hierüber im Frstl. Hülfsbuch 1. u. 2. Abth.)

22. Des Bestandes Fläche erweise sich als unregelmäßiges, etwa 6- oder 7-eckiges Vieleck. Dann reicht, wie wir aus mehrfachen Erfahrungen wissen, bei mäßiger Ausdehnung eine Stunde hin, denselben mit dem an einen Kettenstab geschraubten Meßknecht u. Visirlineal zu umziehen, dabei nebst den Seiten sämmtliche Winkel auf $^1/_5$ bis $^1/_{10}$ Grad genau (durch Repetition, unter Umständen noch etwas genauer) zu messen und daraus polygonometrisch stehenden Fußes dessen Flächeninhalt und Gesammtertrag abzuleiten.

23. Beim Nachhausegehen lächelt die dem Horizont zueilende Sonne noch in hinlänglich hellem und hohem Strahle auf die thätig gewesene Schaar. Ihr baldiger Scheidegruß erinnert uns an eine kleine Zugabe zum heutigen Practicum. „Also flink, meine jungen Freunde! fangt diesen Sonnenstrahl mit Euerem zu diesem Behufe wohljustirten Knechte und Schattenstifte auf!

Berechnet darnach heut Abend noch den Fehler Euerer Uhr und bringet letztere morgen früh demgemäs berichtigt mit! Wir wollen dann vergleichsweise sehen, wer auch in dieser Beziehung sein Zeug im besten Stande hat und dasselbe am geschicktesten zu verwenden und zu verwerthen weiß!"

Zus. Die dieser Zeitmessung zu Grunde liegende Formel kann, ohne tieferes Eingehen auf die sphärische Trigonometrie, unschwer lediglich aus den Elementarlehren der Stereometrie und rechtwinkligen Trigonometrie abgeleitet werden (s. Math. Aschenbrödel, S. 90). — Hier wie sonst werden die exactesten trigonometrischen Rechnungsresultate jene Schüler bringen, die gelernt haben, alle Sinusse, Cosinusse, Tangenten ꝛc. bis zur vierten Ziffer mittels Meßknechts-Tafel der Chorden und der Bogenhöhen (Ch. u. Bh.) abzulesen.

Bekanntlich ist, wenn Ch. u. Bh. die Chorde u. Bogenhöhe („Pfeil") bedeuten: **1)** $\text{Ch. } \alpha = [1 - \text{Bh. } (180 - 2\,\alpha)]\,2$, also z. B. $\text{Ch. } 130^{\circ} = (1 - \text{Bh. } 50^{\circ})\,2 = (1 - 0{,}0937)\,2 = 1{,}8126$; so daß man in der That aus Meßknechts linker Ecke die Chorden aller Winkel von 0 bis 180° und somit vermöge folgender Formeln die trigonometrischen Werthe aller möglichen Winkel gleichfalls bis zur vierten Decimale aus jenem Täfelchen abzuleiten vermag; als:

2) $\sin.\alpha = \tfrac{1}{2}\,\text{Ch. } 2\,\alpha$ od. $= 1 - \text{Bh. } (180 - 2\,\alpha)$

3) $\cos.\alpha = 1 - \text{Bh. } 2\,\alpha$ od. $= \tfrac{1}{2}\,\text{Ch. } (180 - 2\,\alpha)$

4) $\text{tng.}\alpha = \dfrac{\tfrac{1}{2}\,\text{Ch. } 2\,\alpha}{1 - \text{Bh. } 2\,\alpha}$ od. $= \dfrac{1 - \text{Bh. } (180 - 2\,\alpha)}{\tfrac{1}{2}\,\text{Ch. } (180 - 2\,\alpha)}$

Es bedarf dem vorn Bemerkten gegenüber hierzu wohl kaum noch der Hinweisung, zu welch wesentlich reicherer Mannigfaltigkeit solch Praktikum sich erweitert, sobald wir, sei es in der Schule oder im Freien, eingehender die Gebiete der physikalischen, mechanischen, technologischen ꝛc. Kapitel der Brieftasche betreten wollen oder können. Als z. B. (S. die betr. Einleitung selbst.)

— — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — —

— — — — — — — — — — — — — — — — —

Was aber beim Ueberblicke dieser Beispiele und Andeutungen gewiß manchem unserer aufmerksamen Leser als ein Punkt von besonders erzieherischer Bedeutung in die Augen springen dürfte, das ist wohl der unzweifelhafte Einfluß, den Uebungen solcher Art, außer ihrer charakteristisch-formalen Bildungskraft im Allgemeinen, namentlich auch auf Förderung der Selbstständigkeit und Gewandtheit in Beherrschung und Handhabung der Wissenschaft ausüben müssen; ein Einfluß, der jedem pädagogischen Mathematiker nichts weniger als gleichgültig sein kann, besonders wenn er zugleich eine lebenspraktische Bildung anstrebt. Denn im eigentlichen Leben oder jenseits der Schule steht uns kein Mentor zur Seite, der uns die in der Regel ziemlich lakonisch gestellte Aufgabe analysirt und uns sagt oder andeutet, welche Mase und Masgesetze, welche mathematische, naturwissenschaftliche, technische, wirthschaftliche und sonst noch einschlagenden Werthe und Regeln wir dabei zu wissen, zu messen oder herbeizuschaffen, oder in welchen Zweigen der Wissenschaften wir sie zu suchen haben; da ist Niemand, der uns die Unterlagen zur Lösung so mundrecht zur Hand legt, wie es derzeit im Schulleben so oft geschehen muß. Gestützt dagegen und hinweisend auf die theoretischen und praktischen Hülfen dieser Brieftasche (welche nach so vielen Seiten hin mit Leichtigkeit in die Theorie und Praxis hineinzugreifen, und ebenso beide fruchtbar mit einander zu verknüpfen gestatten) wird es dem Lehrer leicht werden, seine Schüler allmälig ganz auf eigene Füße zu stellen; dergestalt, daß dieselben schließlich selbst bei den complicirteren Aufgaben nichts als die nackte Frage brauchen; und darauf (simulirend, analytisch und synthetisch deducirend, beobachtend, messend, in den concurrirenden Wissenschaftsgebieten literarisch suchend ꝛc.) sich selber alles Nöthige in gehöriger Art herbeizuschaffen und zurecht zu richten vermögen: ganz wie das Leben draußen es in der Regel verlangt.

Insbesondere aber glaube ich rücksichts des geodätischen Gebietes dieser Uebungen noch darauf aufmerksam machen zu sollen, wie die Billigkeit des dazu etwa noch nöthigen Etuis und Stativs (s. Math. Aschenbrödel: „Notiz über Nachbezug 2c.") jeder Schule es gestattet, sich eine genügende Anzahl davon zuzulegen; wie sie sogar gestattet, einzelnen Schülern die eigene Anschaffung zuzumuthen, namentlich solchen, die sich der Forst- u. Landwirthschaft, dem Ingenieur-, Militär- u. Bauwesen u. dgl. widmen wollen, da dieser Apparat ja nicht blos für das Schulleben bestimmt ist; und wie es nun der Lehrer in Folge der hierdurch ermöglichten Selbstthätigkeit unschwer und in einer für ihn selbst nur erfreulichen und interessanten Weise (unter Anregung des Wetteifers und auf Grund comparativer Uebungen) dahin bringen kann, daß Jeder mit seinem Apparate mit möglichster Flottheit das möglich Vollkommenste leisten lerne. Dann aber hat damit auch Jeder derselben in Bezug auf geodätische Anstelligkeit und Gewandheit (als z. B. in Bezug auf Vorsicht, Zartheit und Akkuratesse beim Auf- und Einstellen, Ablesen und sonstigen manuellen und intellectuellen Vermessungsoperationen; insbesondre beim Mitgebrauche des mit Röhrenlibelle versehenen Meßknechtsvisirlineals zum Aufnehmen u. Nivelliren) eine Selbstschule durchgemacht, welche ihm beim Uebergange zu feineren u. complicirteren Instrumenten außerordentlich zu statten kommt; ganz abgesehen von der nicht unbedeutenden Mitwirkung dieser Selbstschule zur Erreichung eines schärfer und schärfer ins Auge zu fassenden Hauptzieles humanistischer wie gewerblicher Erziehung: d. i. einer möglichst **lebenspraktischen Intelligenz**."

Soweit der Herr Verfasser! in dessen Geiste u. Namen wir nun bitten dürfen:

Nachdem sowohl besagte „Mathematische u. polytechnische Brieftasche" (in 3. Aufl. mit Meßknecht kräftigern Stichs) als auch das ihr mehr u. minder eng verwandte „Mathematische Aschenbrödel" (mit Meßknecht feinern Stichs)

in unsern Verlag übergegangen:

so wollen die Herren Sachverständigen in Schule u. Praxis, soweit angemessen im Sinne vorgedachter Brieftaschen-Einleitung u. wenn möglich auf Grund wirklichen praktischen Versuchens nun erwägen, ob u. in wie fern die mit dem einen od. andern dieser beiden Werkchen verbundenen Ideen, Zwecke u. Hülfen zu einer etwa noch weitern Ausbildung u. Verwendung „in Schule u. Leben" geeignet sein möchten; wobei wir, besonders im Intresse der mehr technischen Geschäftswelt noch herauszuheben haben, daß unsers Wissens Preßler's „Brieftasche" bisher das einzige polytechnische Vademecum ist, das in seinen Kapiteln: Physik u. Chemie, Mechanik, Maschinenlehre u. Technologie die betreffenden Größen od. Werthe nicht allein bereits in neudeutschem od. metrischem, sondern auch, wo irgend nöthig, gleichzeitig auch daneben noch im seitherigen preußischen (u. östreichischen) Maaße aufführt; sowie daß von jetzt ab diese Brieftasche ebenfalls mit Augenglas u. entsprechend vervollkommnetem Meßknechtsfutterale ausgestattet erscheint, u. zwar ohne Erhöhung ihres seitherigen Ladenpreises von 2 Thlr. in engl. Leinen u. 2 Thlr. 5 Ngr. in Leder. Wir bitten nun, sowohl hiervon als, zur Vermeidung nachtheiliger Weiterungen, insbesondre auch

von vorbemerktem Verlagsübergange bestimmt u. bleibend Notiz zu nehmen.

Leizig, 1870.

Baumgärtner's Buchhandlung.

Druck der Königl. Hofbuchdruckerei von C. C. Meinhold & Söhne in Dresden

Notiz über Nachbezug

von separaten Messknechten und etwaigen Armaturen dazu.

(Gleichzeitig als Ergänzung der früheren bezüglichen Angaben in den übrigen Werken des Verfassers. — Die Abkürzung „Asch." und die angeführten §§ beziehen sich auf die Schrift: „Das mathematische Aschenbrödel in Schule, Werkstatt, Wald u. Feld oder der Ingenieur-Messknecht mit u. ohne Verbindung seiner polytechnischen Brieftasche" etc. in 4ter Auflage. Leipzig. Baumgärtner's Buchhandlung. 1870.)

Mit Hinweis auf Asch. § 1—8 sei zunächst wiederholt, **a**) dass besagter Messknecht von 1870 ab in zweierlei Stichen existirt: dem bisherigen kräftigern, mit blossem Auge leichter ablesbaren (den ersten drei Auflagen der Brieftasche beigegeben) und einem neuern, feinern, für gewöhnliche gute Augen aber immer noch ohne Glas hinreichend deutlichen, dabei zum Theil um eine Decimale schärfer arbeitend und deshalb dem „Aschenbrödel" zunächst beigeschlossen; — **b**) dass, um gegen alle Fälle eines etwa schwächern Auges od. Lichtes gehörig gerüstet zu sein, von nun an jedem Knechte, des feinern wie des gröbern Stichs, ein 2- bis $2\frac{1}{2}$mal vergrösserndes Glas beigefügt wird, u. **c**) dass hinfüro jede dieser beiden Arten in dreierlei Stärken separat d. i. ohne Textbuch od. Brieftasche u. dgl. nachbezogen werden kann: mit Glas also u. einem Futterale, welches, wie das in der „Brieftasche" u. im „Aschenbrödel" leicht in jedwedes Buch eingefügt werden kann, dafern letztres nur, damit es nicht sperre, mit einem entsprechend raumern Rücken versehen worden ist. Wobei **d**) noch aufmerksam zu machen, dass die schwachen Knechte am bequemsten zur Einlage ins Portefuille od. Taschenbuch behufs Freihandgebrauchs, und die starken oder „Doppelknechte" am besten zum Stativgebrauch insbesondre mit Visirlineal sich eignen, während die „gewöhnliche od. Mittelstärke", wie solche im „Aschenbrödel" repräsentirt ist, wohl beiderlei Zwecken zu dienen vermag, natürlich aber keinem in ganz so bequemer oder (bei Horizontalstellungen mit Libelle) eben so sichrer Weise.

Bei Nachbezug von derlei separaten Messknechten bestelle man also stets bestimmt u. deutlich: ob schwache, mittle od. starke u. ob vom kräftigern od. feinern Stich. Bei Bestellungen ohne derlei bestimmtere Angaben werden Buchhandlung u. Machanikus etc. stets annehmen, dass die Mittelstärke und der feinere Stich verlangt worden.

Die für diese und die andern Hülfsmittelchen d. i. die kleinen u. grossen Armaturen (Asch. Kap. 11 u. 12), unter der Forderung u. Zusage einer allenthalben sorgfältigen Ausführung, dermalen zu erreichen gewesenen Miminalpreise stellen sich demgemäs nun wie folgt:

	Thl.	Gr.
No. 1. Die schwachen u. No. 2 die mittelstarken Messknechte, mit Glas u. Futteral wie oben angegeben . . . . . à	—	21
„ 3. Die starken od. Doppelknechte mit Glas u. Futteral . à	—	24
„ 4. Justirte Doppelknechte (nur vom feinern Stich) in Futteral mit Glas . . . . à	1	—
NB. Dies Justiren besteht im exacten Feststellen u. Anstechen des Decimeters bei dem Striche 100 (Asch. § 129); der drei Ecken des armirten Winkelkreuzes (§ 16); des Horizontalkreis-Centrums (§ 127) u. der Nivellir- u. Hipsometer-Richtpunkte der Pendelwand (§ 128): letztres auch behufs der Sonnenhöhen- od. Zeitmessung.		

	Thl.	Gr.
No. 5. Das Zeughäuschen (Asch. § 141—148) in engl. Leinen-Etui	—	24
„ 6. Das halbe Zeughäuschen (10 Visirstifte, 2 Klammern u. 2 Reservelothe in Papp-Schächtelchen)	—	12
„ 7. Messknechts-Lupen v. ca. 2½ maliger Vergrösserung { einzeln	—	3
à Dutz.	—	24
„ 8. Der Stativstock, kurz od. lang (Asch. § 149) . . . . . Wenn nichts Näheres bestimmt, wird stets der längere gesandt.	3	—
„ 9. Das Visirlineal in kleinerm Etui (§ 151—158) mit Zirkel	3	—
„ 10. Dasselbe in grossem Etui mit inliegendem justirten Doppelknecht (s. No. 4) nebst Zirkel	4	—
„ 11. Das vorige mit Orientirbussole und justirtem Doppelknecht (Asch. § 154 u. 159)	6	—

Um die sub **1—7** angeführten Instrumentchen d. h. separate Knechte ohne od. mit „kleiner“ Armatur aufs bequemste u. schnellste zu erhalten, wird man sich i. d. R. am besten direkt nach Leipzig an Baumgärtner's Buchhandlung wenden, welche in der Lage ist, gegen frankirte Einsendung des Betrags der bestellten Exemplare mit umgehender Post u. zwar im deutsch-östreich. Postverein gleichfalls franco (einzelnes unter Kreuzband) zu senden, freilich aber auf Gefahr des Bestellers, welch letztres vielleicht für manche Gegenden nicht ohne Bedenken. Ausserdem u. namentlich auch betreffs des andern etwa gewünschten Zubehörs wird man, vollends wo freundliche Verhältnisse es begünstigen, am bequemsten u. sichersten, wenn auch nicht so schnell, durch Vermittelung seiner Buchhandlung zum erforderlichen Ziele gelangen; oder aber, namentlich bei grösserm Bedarf, durch direkten Bezug (aller obiger Apparate 1—11) von derjenigen mathem.-mechanischen Werkstätte, deren Chef vom Verf. **bisher** (eine weitere Garantie kann natürlich nicht gegeben werden) als vorzugsweise gewissenhaft u. zuverlässig erkannt worden u. in Folge dessen in der Lage ist, sich am Schlusse dieser Notiz dem gesammten messknechtsfreundlichen Publikum in gedachtem Sinne selbst zu recommandiren.

Im Uebrigen aber brauchen Jene, welche Grund haben, vom § 8 des „Aschenbrödel“ Gebrauch zu machen, keinen Anstand zu nehmen, solchen getrost auch auf die „math. u. polyt. Brieftasche“ (in 3. Aufl. mit Messknecht von kräftigern Stich) auszudehnen, nachdem dieselbe jetzt ebenfalls mit Augenglas u. verbessertem Futteral ausgestattet in Baumgärtner's Buchhandlung übergegangen.*)

Tharand, 1870. **Pressler.**

*) Auf welchen Verlagsübergang wir nochmals aufmerksam zu machen uns erlauben.
Leipzig. **Baumgärtner's Buchhandlung.**

Mit Bezug auf Vorstehendes gestatte mir, mein Atelier nicht allein zu besagten Zwecken sondern auch betreffs andrer mathematischer u. physikalischer Apparate, insbesondre für Schulen, ganz ergebenst zu empfehlen mit dem Versprechen, dass ich bemüht bleiben werde, die fraglichen Messknechts-Armaturen möglichst genau nach den im „Math. Aschenbrödel“ Kap. 10—12 angeführten Vorschriften des Herrn Verfassers auszuführen und prompt zu liefern. Zugleich erbiete mich auch in specie den Herren Forst- u. Landwirthen, Bautechnikern, Fabrikbesitzern u. dgl., sämmtliche in Herrn Hofrath Prof. Pressler's „Forstl. Hülfsbuch“ oder dessen Abzweigungen „Holzcubirer“ u. „Forsttaxator“ empfohlenen Werkzeuge etc. bestens und billigst zu liefern.

Dresden. **Mechanicus Schadewell.**

Futteral für ein Notizbuch

wie auch für die

schmale Ausgabe der Supplemente

zu Pressler's Forstlichem Hülfsbuch etc.;

letzteres: im Falle es zweckmäsig erscheint, irgend eine — diesem Hülfsbuche fest eingebundne — Haupttafel mit einer Supplementstabelle gleichzeitig in Einem Aufschlage zu benutzen; als z. B. mit:

I. Allgemeine **Multiplikations- und Divisions**-Tafel,
zugleich für **Geldberechnungen nach 10- u. 100-theil. Münzsysteme** (Oestr., Russl., Frkr.) **wie für Cubirung** des Beschnittenen u. Behauenen **im metrischen Mas.**

II. Geldberechnungstafel **nach Thalern à 30 Groschen** u. mittelbar auch nach Gulden à 60 Kreuzer.

III. Specialtafeln zur **Cubirung geschnittner u. behauener** Hölzer u. Steine zur **Ausbeutg. der Stämme** auf **Nutzholzsorten,** als **Balken, Bloche, Breter** etc.
wie auch zur Vergleichung, Um- u. Berechnung von
Mas, Gewicht u. Geld u. technisch-bedeutsamer Körpergewichte.

IV. Zur Forstbetriebseinrichtung: Grundzüge und Instruction zur Schätzung, Regulirung und Bewirthschaftung eines Reviers im Sinne des Reinertragswaldbau's.

V. Populäre Gebrauchs-Anweisung zum Zuwachsbohrer etc.
mit Tafeln für Forstwirthe u. Grundbesitzer, welche ihre Holzwirthschaft inner wie ausser dem Walde im Geiste höchster Reinertragsproduktion klären und vervollkommnen wollen.

VI. Metrisches Supplement (für's neue Mas; erscheint Anfang 1870).

Von demselben H. Verfasser erschien — z. Th. in Dresden bei Türk, z. Th. in Leipzig bei Baumgärtner:

A. Mathematische u. polytechnische **BRIEFTASCHE** mit Ingenieur-Messknecht zur Erleichterung, Belebung u. Befruchtung von Wissenschaft, Unterricht u. Praxis für höhere u. mittlere Schulen und messungs- u. rechnungsbeflissene Stände aller Art. 3. Aufl. (mit Messknecht vom kräftigern Stich; seit 1870 in) Leipzig bei Baumgärtner.

B. Das mathematische **ASCHENBRÖDEL** etc. etc. 3. Aufl. Siehe gegenwärtiges Werk. 1870. Leipzig; Baumgärtner.

C. Der **RATIONELLE FORSTWIRTH** u. dessen Reinertrags-Forstwirthschaft inner wie ausser dem Walde etc. Dresden bei Türk: 1858—1860. In zwanglosen Heften mit folgenden Specialtiteln:

1. Des Waldbau's Zustände u. Zwecke. Eine Kritik u. Einleitung zur Begründung einer zeitgemäsen Reform der Forstwirthschaft. 1858. — **2.** u. **3.** Die Forstfinanzrechnung mit Anwendungen auf Waldwerthschätzung u. Waldwirthschaftsbetrieb, als Hauptgrundlage einer volkswirthschaftlich- u. technisch-rationellen Holzproduktion. 1859. — **4.** Der Hochwaldbetrieb der höchsten Bodenkraft bei höchstem Massen- u. Reinertrage. 1864. — **5.** Der Waldbau des Nationalökonomen als Begründer wahrer Einheit zwischen Land- u. Forstwirthschaft und deren Schulen, einschliessend Verf.'s Hauptprogramm: „Die Forstwirthschaft der sieben Thesen." 1865. — **6.** Das Gesetz der Stammbildung u. dessen forstliche Bedeutung insb. für den Waldbau höchsten Reinertrags u. für die forstliche Baumwirthschaft des Landwirths etc. 1865. (Als Separatabdruck aus dem Tharander Jahrb.: Leipzig bei Arnold.) — **7.** Zur Forstzuwachskunde mit besondrer Beziehung auf den forstln. Zuwachsbohrer (neuester Construction) u. dessen prakt. Bedeutung u. Anwendung in Sachen holzwirthschaftlicher Forschungs-, Schätzungs-, Pflege- u. Nutzungs-Technik, insb. für solche Forstverwalter, Waldbesitzer u. Landwirthe, welche ihre Holzproduction inner wie ausser dem Walde im Geiste höchster Reinertragsproduktion klären u. vervollkommnen wollen. 1868.

Hierzu als **Handbuch u. Hauptwerk** zur Anwendung u. Ausführung der in den vorstehenden Werken enthaltenen resp. begründeten Lehren:

D. Forstliches **HÜLFSBUCH** für Schule u. Praxis nach neuerem Stande der Wissenschaft u. Erfahrung in Tafeln u. Regeln zur Erleichterung u. Vervollkommnung holzwirthschaftlicher u. verwandter Rechnungs-, Messungs-, Schätzungs- u. Betriebsarbeiten mit besondrer Beziehung auf einen nationalökonomisch- u. forsttechnisch-rationellen Reinertragswaldbau für Forstverwalter, Waldbesitzer etc. Roh od. gebunden (mit 2 Taschen) mit u. ohne Supplemente I, II. III (s. sub G). 2. Aufl. 1869. Dresden.

Und daraus u. dazu als separate Zweige oder selbständige Supplemente:

E. Der umfassend-praktische **HOLZCUBIRER** für's Liegende u. Stehende in Tafeln u. Regeln zur Bemessung u. Berechnung der Hölzer nach Dimensionen, Form, Verschnitt, Gewicht, Schwinden, Heizkraft, Sorten- u. Totalgehalt u. Werth. Roh od. gebunden (mit 2 Taschen), mit u. ohne Supplemente I, II, III (s. sub G). 3. Aufl. 1869. Dresden.

F. Der compendiös-praktische **FORSTTAXATOR**: ein zum bequemen Werkplatze u. Waldgebrauche bestimmter Taschenauszug sämmtlicher Haupt- u. Nebentafeln von vorgenanntem „Hülfsbuch" u. „Holzcubirer"; elegant in engl. Leinen, mit Messknechts-, Supplements- u. Notizbuchstaschen. 3. u. 4. Aufl. 1869. Dresden.

G. Forst- u. bauwirthschaftliche **SUPPLEMENTSTAFELN** zu C, D, E u. F: I. Allgem. Multiplikations- u. Geldberechnungstafel nach 10- u. 100theilig. Münzsystem; II. Geldberechnungstafel nach Thalern u. Groschen; III. Insgemein, als: zur Bemess. u. Ausnutzung der Bau- u. Werkhölzer u. Be- u. Umrechnung v. Mas, Gewicht u. Werth etc., nebst allg. Divisions- u. Kreistafel. 3. Aufl. 1869. Dresden.

NB. Neben C u. D noch zu beachten: „Die **Hauptlehren der rationellen Forstwissenschaft**"; ein Suppl. zu den Pressler'schen Werken für Forstwirthe u. Grundbesitzer von H. A. Schuster, Kgl. Sächs. Oberförster. 1869. Dresden; Türk.

Druck der Königl. Hofbuchdruckerei von C. C. Meinhold & Söhne in Dresden.

Pressler, Max Robert

Das mathematische Aschenbrödel in Schule, Werkstatt, Wald und Feld oder der Ingenieur-Messknecht ... für mittlere u. höhere Lehranstalten u. messende u. rechnende Stände aller Art

Leipzig 1870